

Zufällige Mosaik und das Kovariogramm

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
an der Fakultät für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von
Christian Deuß
aus Mönchengladbach

Betreuer: Prof. Dr. Christoph Thäle

Bochum, den 19. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	13
2.1	Integral- und Konvexgeometrie	14
2.2	Zufällige abgeschlossene Mengen	19
2.3	Punktprozesse	20
2.4	STIT Mosaike	21
2.5	Exponentialintegrale	26
3	Das Kapazitätsfunktional von STIT Mosaike	31
3.1	Eigenschaften des Kapazitätsfunktionals	31
3.2	Mischungseigenschaft von globalen STIT Mosaike	36
3.3	Varianz der Gesamtoberfläche von lokalen STIT Mosaike	41
4	Das Kovariogramm	59
4.1	Asymptotische Entwicklungen des Kovariogrammes	59
4.2	Anwendungen auf Modelle der Stochastischen Geometrie	73
4.2.1	Anwendung auf Gilbert Graphen	73
4.2.2	Anwendung auf Poisson-Voronoi Approximationen	76
4.2.3	Anwendung auf Boolsche Modelle	80
4.2.4	Anwendung auf STIT Mosaike	85
5	Momente der Gesamtoberfläche von lokalen STIT Mosaike	91
5.1	Momentenformel für Funktionale von lokalen STIT Mosaike	91
5.2	Das asymptotische Verhalten der Varianz der Gesamtkantenlänge von lokalen STIT Mosaike	97
5.2.1	Die Varianz der Gesamtkantenlänge eines lokalen STIT Mosaiks in einem Kreis	105
5.2.2	Die Varianz der Gesamtkantenlänge eines lokalen STIT Mosaiks in einer Ellipse	109
5.2.3	Die Varianz der Gesamtkantenlänge eines lokalen STIT Mosaiks in einem Rechteck	116

6	MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2	123
6.1	Grundlagen	123
6.2	Konstruktion von MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2	130
6.3	Eigenschaften von MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2	132
6.4	Mittelwerte von MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2	135
6.5	Poissonsche Großkreismosaik auf \mathcal{S}^2	146
	Literaturverzeichnis	149

Kapitel 1

Einleitung

Die ab 1970 entstandene Stochastische Geometrie beschäftigt sich mit Modellen für zufällige Mengen, Punkt- bzw. Partikelprozesse sowie zufällige Mosaike auf euklidischen und sphärischen Räumen. Die Theorie zufälliger Mengen wurde unabhängig von Kendall [32] im Jahr 1974 und von Matheron [40] im Jahr 1975 entwickelt. Sie gilt bis heute als Herzstück der Stochastischen Geometrie. Die Grundlagen der Stochastischen Geometrie wurde 1975 von Matheron [40] gelegt. In den Modellen der Stochastischen Geometrie werden wichtige und fundamentale Resultate der Integral- und Konvexgeometrie benötigt. Einen Überblick über die grundlegenden Modelle der Stochastischen Geometrie mit Querverbindungen zur Integral- und Konvexgeometrie bietet das Werk von Schneider und Weil [63] an.

In der Konvexgeometrie werden bspw. konvexe Körper in \mathbb{R}^d , d.h. konvexe und kompakte Mengen in \mathbb{R}^d , auf verschiedene Eigenschaften untersucht. Ein wichtiger Bestandteil dieser Theorie ist die Untersuchung des Volumens des Parallelkörpers eines konvexen Körpers K mit Abstand $\varepsilon \geq 0$. Der Parallelkörper beschreibt die Minkowski-Summe von K mit einer d -dimensionalen Kugel mit Radius ε . Dann besagt die Steiner-Formel, dass das Volumen des Parallelkörpers ein Polynom in ε von höchstens Grad d beschreibt, wobei sich die inneren Volumina $V_0(K), \dots, V_d(K)$ von K aus den Koeffizienten des Polynoms ergeben. Für die folgenden historischen Hintergründe zur Steiner-Formel verwenden wir die Anmerkungen von Schneider [61]. Demnach lässt sich die Steiner-Formel auf Steiner [69] im Jahr 1840 zurückführen, der diese zunächst für Polytope und Mengen mit 2-mal stetig differenzierbaren Rand und strikt positiven Hauptkrümmungen in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 zeigen konnte. Weiterhin konnte Weyl 1939 in [73] eine Art Steiner-Formel für glatte Mannigfaltigkeiten im euklidischen und sphärischen Raum liefern. Die Steiner-Formel wurde auch von Herglotz [24], Vidal Abascal [72], Allendoerfer [2] und Santaló [59] für verschiedene Mengen untersucht. Eine endgültige Version der Steiner-Formel für konvexe Körper wurde durch das Werk von Hadwiger [23] im Jahr 1957 gegeben. Als aktuelle Nachschlagewerke eignen sich vor allem die Werke von Schneider und Weil [62, 63].

Aus der Steiner-Formel liest man leicht ab, dass $V_0(K)$ die Euler-Charakteristik eines konvexen Körpers K in \mathbb{R}^d und $V_d(K)$ das gewöhnliche Volumen von K definieren. Außerdem beschreibt $V_1(K)$ die mittlere Breite von K , und für d -dimensionale konvexe Körper K kann $2V_{d-1}(K)$ als die Oberfläche von K gedeutet werden. Das innere Volumen V_j ,

$j \in \{0, \dots, d\}$, ist als Funktional auf dem Raum der konvexen Körper \mathcal{K}^d in \mathbb{R}^d betrachtend bewegungsinvariant (invariant gegenüber euklidischen Bewegungen), homogen vom Grad j , additiv, stetig bzgl. der Hausdorff-Metrik auf \mathcal{K}^d und monoton. Des Weiteren hat Hadwiger [23] festgestellt, dass der Raum der bewegungsinvarianten, additiven und stetigen Funktionale $\varphi : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Basis V_0, \dots, V_d ist. Dieses Resultat ist auch als Satz von Hadwiger bekannt. Ein alternativer und auch kürzerer Beweis wurde 1995 durch Klain [34] vorgestellt. Anwendungen des Satzes von Hadwiger findet man in der Integralgeometrie wieder, z.B. wurden die Crofton- und Kubota-Formel von Hadwiger in [23] mithilfe dieser Charakterisierung bewiesen. Als aktuelles Nachschlagewerk dient das Werk von Klain und Rota [35] aus dem Jahr 1997. Die Formeln, in denen invariante Maße zugrunde liegen, sind später für die hier betrachteten Modelle aus der Stochastischen Geometrie von wesentlicher Bedeutung, falls in diesen Modellen Invarianzeigenschaften, d.h. Stationarität und Isotropie, vorausgesetzt werden können.

Der Ursprung der Crofton- und Kubota-Formel liegt schon sehr weit zurück. Dabei beschränken wir uns auf die Bemerkungen aus [23]. Demnach führen die Ansätze der Kubota-Formel auf Cauchy [10] im Jahr 1841 zurück, welche 1911 von Minkowski [47] verallgemeinert wurden. Zudem stammt die Crofton-Formel im Wesentlichen von Crofton [13, 14] aus dem Jahr 1868 bzw. 1869 und wurde 1935 von Varga [71] erweitert. Beide Formeln lassen sich im Werk von Schneider und Weil [63] nachlesen.

Ein weiterer Bestandteil der Konvexgeometrie ist der Begriff des Kovariogrammes einer konvexen Menge. Das Kovariogramm $\gamma_K(y)$ einer konvexen Menge $K \in \mathcal{K}^d$ in $y \in \mathbb{R}^d$ ist das Volumen des Durchschnittes von K und der Minkowski-Summe $K \oplus \{y\}$ und wurde von Matheron [40] im Jahr 1975 eingeführt. Wegen der Invarianz von V_d gegenüber euklidischen Bewegungen stellte Matheron [41] die Frage, ob das Kovariogramm einen konvexen Körper eindeutig bis auf euklidische Bewegungen bestimmt, und vermutete eine positive Antwort für den Fall $d = 2$. Zunächst konnte Nagel [49] im Jahr 1993 die Vermutung von Matheron für konvexe Polygone bestätigen. Ehe Averkov und Bianchi 2009 in [5] Matherons Vermutung für $d = 2$ vollständig verifizieren konnten, ergaben sich nützliche Teilresultate dank Schmitt [60], Bianchi, Segala und Volčič [9], Bianchi [7] sowie Averkov und Bianchi [4]. Der Fall $d = 3$ konnte bisher von Bianchi [8] nur für Polytope gezeigt werden, für allgemeinere konvexe Mengen ist das Problem noch offen. Für $d \geq 4$ hat Bianchi [7] hingegen Matherons Vermutung widerlegen können.

Da das Kovariogramm in vielen Modellen der Stochastischen Geometrie eine essentielle Rolle einnimmt, interessiert man sich insbesondere für eine Taylorentwicklung des eindimensionalen Kovariogrammes $\gamma_K(\cdot u) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ in $0+$ für einen Punkt u aus der Einheitssphäre \mathcal{S}^{d-1} . Für konvexe Mengen $K \in \mathcal{K}_+^2$ mit 2-mal stetig differenzierbarem Rand und strikt positiven Hauptkrümmungen konnten Bianchi, Segala und Volčič [9] im Jahr 2002 ein drittes Taylorpolynom von $\gamma_K(\cdot u)$ in $0+$ gewinnen. Diesbezüglich konnte Rataj 2004 in [54] eine Verallgemeinerung für konvexe Körper K mit hinreichend glattem Rand beliebiger Dimension $d \geq 2$ erreichen. Andererseits hat Galerne [21] im Jahr 2011 eine Taylorentwicklung der Ordnung 1 in $0+$ für Mengen mit endlichem Perimeter entdeckt.

Die Anwendungen des Kovariogrammes auf Modelle aus der Stochastischen Geometrie beschäftigen sich mit Gilbert Graphen, Poisson-Voronoi Approximationen, Booleschen

Modellen und STIT Mosaike. Um einen Gilbert Graphen zu konstruieren, betrachtet man eine Folge $(x_j)_{j=1,\dots,M}$ von unabhängigen und identisch verteilten Punkten in $K \in \mathcal{K}^d$, wobei deren Anzahl M unabhängig zu $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist und eine Poisson-Verteilung besitzt. Wir identifizieren hierbei die Punkte x_1, \dots, x_M als Knoten und verbinden zwei verschiedene Knoten mit einer Kante, falls deren Abstand kleiner oder gleich einem fixen $\delta > 0$ ist. Der so konstruierte Graph wird Gilbert Graph genannt. Dieses Modell wurde 1959 von Gilbert [22] eingeführt. Zeitgleich, aber unabhängig davon, präsentierten Erdős und Rényi [19] ihr Modell für zufällige Graphen. Eine wichtige Referenz ist das grundlegende Werk von Penrose [52] mit den dort genannten Referenzen. Reitzner, Schulte und Thäle [56] interessierten sich für Grenzwertsätze für Gilbert Graphen und stellten fest, dass das asymptotische Verhalten des Kovariogrammes in $0+$ das der gemittelten Längenfunktionale eines Gilbert Graphen bestimmt, falls die Intensität der Knoten im Gilbert Graphen erhöht wird.

Eine weitere Anwendung beschäftigt sich mit Poisson-Voronoi Approximationen. Dazu wird ein homogener Poissonscher Punktprozess η_λ in \mathbb{R}^d mit konstanter Intensität $\lambda > 0$ betrachtet und zu jedem Punkt $x \in \eta_\lambda$ wird die Poisson-Voronoi Zelle $\nu_{\eta_\lambda}(x)$ mit Kern x gebildet. Die Poisson-Voronoi Zelle $\nu_{\eta_\lambda}(x)$ enthält alle Elemente von \mathbb{R}^d , welche näher an x als an allen anderen Punkten $y \in \eta_\lambda$ mit $y \neq x$ liegen. Die Poisson-Voronoi Approximation K_{η_λ} von $K \in \mathcal{K}^d$ ist die Vereinigung aller Poisson-Voronoi Zellen $\nu_{\eta_\lambda}(x)$ mit $x \in K$. Diese Konstruktion wurde von Khmaladze und Toronjadze [33] im Jahr 2001 zum ersten Mal untersucht und wurde anschließend von Einmahl und Khmaladze [18] und Penrose [53] weiter studiert. Weiterhin haben Heveling und Reitzner [26] die ersten beiden Momente des Volumens von K_{η_λ} untersucht. Sie zeigten außerdem, dass das Volumen von K_{η_λ} ein erwartungstreuer Schätzer für das Volumen von K ist. Dieses Resultat konnte auf Borelmengen mit endlichem Volumen und endlichem Perimeter von Reitzner, Spodarev und Zaporozhets [57] ausgedehnt werden. Überdies verifizierte 2012 Schulte [68], dass das Volumen von K_{η_λ} den zentralen Grenzwertsatz erfüllt. Des Weiteren untersuchten Reitzner, Spodarev und Zaporozhets [57] das Volumen der symmetrischen Differenz von K und K_{η_λ} und fanden heraus, dass der Erwartungswert des Volumens von dem asymptotischen Verhalten des eindimensionalen Kovariogrammes in $0+$ beeinflusst wird, falls die Intensität der Punkte von η_λ zunimmt.

Um ein Boolesches Modell zu definieren, wird wiederum ein homogener Poissonscher Punktprozess η_λ in \mathbb{R}^d mit konstanter Intensität $\lambda > 0$ betrachtet. Dabei wird jeder Punkt unabhängig mit einem zufälligen konvexen Körper markiert. Die Vereinigung dieser zufälligen konvexen Körper nennt man ein Boolesches Modell \mathcal{Z} , welches ein fundamentales Modell in der Stochastischen Geometrie ist, siehe z.B. [70] und [63]. Miles [46] und Davy [15] beschäftigten sich mit $\mathbb{E}[V_j(\mathcal{Z} \cap K)]$, $j \in \{0, \dots, d\}$, dem Erwartungswert des j -ten inneren Volumens von \mathcal{Z} eingeschränkt in einem Beobachtungsfenster $K \in \mathcal{K}^d$. Im Allgemeinen wurden Varianzeigenschaften und zentrale Grenzwertsätze für geometrische Funktionale von Hug, Last und Schulte [27] untersucht. Dabei enthält die Varianzformel von $V_d(\mathcal{Z} \cap K)$ das eindimensionale Kovariogramm, welches das asymptotische Verhalten dieser Varianz bestimmt, falls K wächst.

Ein weiteres Modell aus der Stochastischen Geometrie ist das der zufälligen Mosaike,

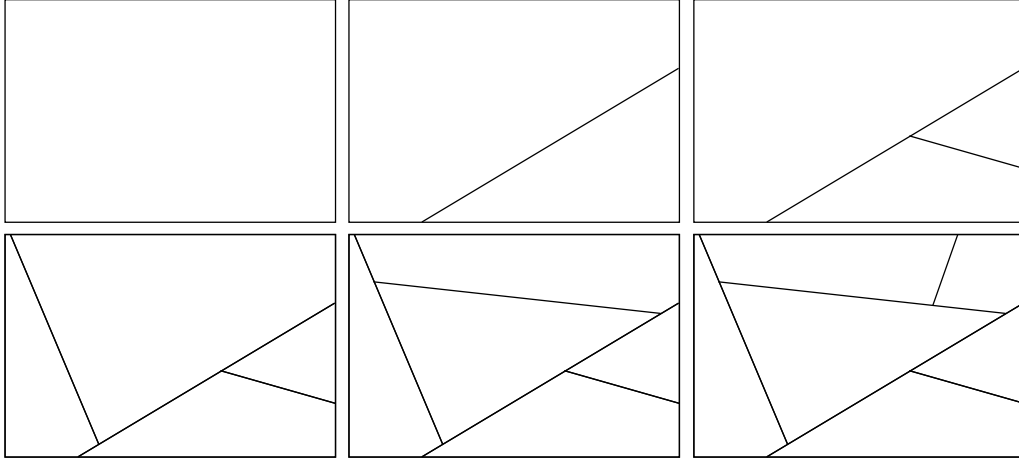


Abbildung 1.1: Entstehung eines lokalen STIT Mosaiks in einem Rechteck.

insbesondere das der STIT Mosaik. Falls der euklidische Raum \mathbb{R}^d in abzählbar vielen, nicht überlappenden konvexen Polytope geteilt wird, so dass in jedem Kompaktum nur endlich viele dieser Polytope liegen, dann heißt die Vereinigung der Ränder dieser Polytope ein Mosaik auf \mathbb{R}^d . Dazu wird der Raum der lokalen Mosaik betrachtet, welche alle Mosaik eingeschränkt in einem konvexen Körper enthält. Man spricht nun von einem zufälligen (lokalen) Mosaik auf \mathbb{R}^d , wenn jede Realisierung ein (lokales) Mosaik auf \mathbb{R}^d charakterisiert. Zudem beschreibt jedes zufällige (lokale) Mosaik auf \mathbb{R}^d eine zufällige abgeschlossene Menge in \mathbb{R}^d und jede Realisierung kann sogar als polykonvexe Menge interpretiert werden.

Die Konstruktion von STIT Mosaik lässt sich auf Mecke, Nagel und Weiß [42, 43, 50, 51] zurückführen. Zu deren Würdigung sprechen nicht wenige bei dieser Konstruktion auch von der MNW-Konstruktion. Dazu wird ein translationsinvariantes Maß Λ_d auf dem Raum der Hyperebenen benötigt, dessen Träger den Raum \mathbb{R}^d aufspannt. Die Konstruktion eines lokalen STIT Mosaik $Y_K(t)$ sieht dann wie folgt aus:

Wir starten zur Zeit $t = 0$ mit einer beliebigen Menge $K \in \mathcal{K}^d$ und ordnen ihr eine exponentialverteilte Lebenszeit mit Parameter $\Lambda_d([K]) > 0$ zu, wobei $[K]$ die Menge aller Hyperebenen beschreibt, die einen nichtleeren Durchschnitt mit K besitzen. Falls diese Lebenszeit abläuft, so wird zufällig eine Hyperebene H gemäß der Verteilung $\Lambda_d([K])^{-1} \Lambda_d(\cdot \cap [K])$ bestimmt, die K in $K^+ := K \cap H^+$ und $K^- := K \cap H^-$ teilt. Dabei sind H^+ und H^- die durch H erzeugten Halbräume. Dann besitzen K^+ und K^- voneinander unabhängige Lebenszeiten, welche ebenfalls exponentialverteilt mit den Parametern $\Lambda_d([K^+])$ und $\Lambda_d([K^-])$ sind. Die Konstruktion wird unabhängig in K^+ und K^- rekursiv fortgesetzt, bis eine deterministische Zeit $t > 0$ erreicht wird. Abbildung 1.1 veranschaulicht die Konstruktion eines lokalen STIT Mosaik in einem Rechteck.

Die ersten Eigenschaften zu STIT Mosaik stammten von Nagel und Weiß [51] aus dem Jahr 2005. Einerseits berechneten sie das Kapazitätsfunktional von $Y_K(t)$ für abgeschlossene Mengen mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten, welches die Verteilung von

$Y_K(t)$ eindeutig bestimmt. Weiterhin konnten sie mit der Charakterisierung des Kapazitätsfunktionals ein globales STIT Mosaik $Y(t)$ für $t > 0$ konstruieren, wobei jede Realisierung von $Y(t)$ ein Mosaik auf \mathbb{R}^d beschreibt. Andererseits haben Schreiber und Thäle [64] unter Verwendung von Martingaltheorie für beliebige Dimensionen die Erwartungswerte der inneren Volumina $V_j(Y_K(t))$, $j \in \{0, \dots, d-1\}$, von $Y_K(t)$ im isotropen Fall, d.h., falls Λ_d zusätzlich rotationsinvariant ist, bestimmt. Für $d \geq 3$ konnten sie zusätzlich Kovarianzen für diese inneren Volumina aufstellen und einen Grenzwertsatz für $V_j(Y_K(t))$ mit einer geeigneten Reskalierung gewinnen, wobei die Grenzverteilung keine Normalverteilung charakterisierte. Diesbezüglich untersuchten Schreiber und Thäle [65] die Varianz der Gesamtoberfläche $V_{d-1}(Y_K(t))$, Gesamtkantenlänge im Fall $d = 2$, überwiegend im isotropen Fall und konnten eine asymptotische Entwicklung dieser Varianz bestimmen. Dabei stellte sich heraus, dass das eindimensionale Kovariogramm in der Varianzformel vorkommt und dass die Fälle $d = 2$ und $d \geq 3$ zu trennen sind. Weitere Grenzwertsätze erhielten Schreiber und Thäle 2013 in [67] für allgemeine translationsinvariante Maße Λ_d . Insbesondere konnten sie zeigen, dass die Gesamtkantenlänge den zentralen Grenzwertsatz erfüllt. In höheren Dimensionen haben sie hingegen eine andere Zielverteilung vorgefunden. Eine weitere Eigenschaft über globale STIT Mosaike konnte Lachièze-Rey [36] im Jahr 2011 enthüllen. Er konnte verifizieren, dass globale STIT Mosaike die Mischungseigenschaft erfüllen und demnach sogar ergodisch sind. Überdies haben Nagel und Martínez in [37–39] die β -Mischung, die ergodische Beschreibung und die tail- σ -Algebra von STIT Mosaike untersucht.

Selbstverständlich können zufällige Mosaike auch auf anderen topologischen Räumen betrachtet und untersucht werden. Ein sehr interessantes und zurzeit aktives Thema sind zufällige Mosaike auf der Einheitssphäre \mathcal{S}^{d-1} . Wenn die Vereinigung von endlich vielen sphärischen konvexen Polytopen, die nur gemeinsame Randpunkte besitzen, den Raum \mathcal{S}^{d-1} überdecken, dann nennt man die Vereinigung der Ränder dieser Polytope ein Mosaik auf \mathcal{S}^{d-1} . Demnach heißt ein Mosaik auf \mathcal{S}^{d-1} zufällig, wenn jede Realisierung ein Mosaik auf \mathcal{S}^{d-1} darstellt.

Im Jahr 1971 hat Miles [45] Großkreismosaike und Voronoi Mosaike auf \mathcal{S}^2 bei einer festen Anzahl an Teilungen von \mathcal{S}^2 untersucht. Eine Verallgemeinerung auf zufällige Mosaike auf \mathcal{S}^{d-1} ist 1994 durch Arbeiter und Zähle [3] gegeben, die sich für verschiedene Mittelwerte interessierten.

Momentan entstehen neue Arbeiten über zufällige Mosaike auf \mathcal{S}^{d-1} . Z.B. betrachteten Bárány, Hug, Reitzner und Schneider [6] zufällige sphärische konvexe Polytope auf der oberen Halbsphäre \mathcal{S}_+^{d-1} und stellten in ihren Resultaten Unterschiede zum euklidischen Fall heraus. Konische Mosaike auf \mathcal{S}^{d-1} haben Hug und Schneider in [28] untersucht. Außerdem entwickelten Deuß, Hörrmann und Thäle [16] eine neue Konstruktion von zufälligen Mosaike auf \mathcal{S}^2 basierend auf der MNW-Konstruktion von STIT Mosaike. Diese Konstruktion und ihre Resultate werden in Kapitel 6 ausführlich diskutiert.

In Kapitel 2 werden die Grundlagen für die Resultate dieser Arbeit behandelt. Zunächst werden die Begriffe der Konvexgeometrie in Zusammenhang mit konvexen Körpern, der Steiner-Formel und den inneren Volumina in \mathbb{R}^d eingeführt. Daraufhin werden elementare Eigenschaften der inneren Volumina vorgestellt und die Crofton- und die Kubota-Formel

als wesentliche und für diese Arbeit nützlichen Resultate aus der Integralgeometrie notiert. Dabei wird die Crofton-Formel unter der Verwendung des Satzes von Hadwiger bewiesen. Zudem kann man die inneren Volumina auf dem Raum der polykonvexen Mengen in \mathbb{R}^d ausweiten und eine verallgemeinerte Steiner-Formel für polykonvexe Mengen, die für die Untersuchung der Gesamtoberfläche eines lokalen STIT Mosaiks in Kapitel 3 angewendet wird, formulieren. Anschließend wird der Begriff einer zufälligen abgeschlossenen Menge in \mathbb{R}^d vorgestellt, welche zu einer Charakterisierung von STIT Mosaiken führt. STIT Mosaiken sind per Definition und Konstruktion zufällige abgeschlossene Mengen in \mathbb{R}^d . Eng verbunden mit der Verteilung einer zufälligen abgeschlossenen Menge ist das Kapazitätsfunktional, das die Verteilung eindeutig identifiziert, siehe [63, Theorem 2.1.3].

Zusätzlich werden Punktprozesse und insbesondere homogene Poissonsche Punktprozesse in \mathbb{R}^d vorgestellt und die Slivnyak-Mecke-Formel für die Bestimmung von Erwartungswerten präsentiert. Überdies geben wir ausführlich die Definition von Mosaiken auf \mathbb{R}^d wieder und leiten daraus die Definition von lokalen Mosaiken in einem konvexen Körper ab. Darauf aufbauend stellen wir die Konstruktion von lokalen STIT Mosaiken in einem konvexen Körper K dar und listen die für diese Arbeit wesentlichen Charakteristika von lokalen STIT Mosaiken auf. Mithilfe einer dieser Eigenschaften kann ein globales STIT Mosaik definiert werden, d.h., jede Realisierung eines globalen STIT Mosaiks beschreibt ein Mosaik auf \mathbb{R}^d . Abschließend zu den Grundlagen beschäftigen wir uns mit Exponentialintegralen und ihren Eigenschaften, die insbesondere für die asymptotische Entwicklung der Varianz der Gesamtkantenlänge eines lokalen STIT Mosaiks gebraucht werden.

In Kapitel 3 gehen wir auf das Kapazitätsfunktional

$$T_{Y_K(t)}(C) = \mathbb{P}(Y_K(t) \cap C \neq \emptyset), \quad C \in \mathcal{C}^d,$$

eines lokalen STIT Mosaiks $Y_K(t)$ in $K \in \mathcal{K}^d$ ein, wobei \mathcal{C}^d das Mengensystem der kompakten Mengen in \mathbb{R}^d kennzeichnet. Entsprechend kann das Kapazitätsfunktional für ein globales STIT Mosaik definiert werden. Für den Fall, dass $C \subset K$ zusammenhängend ist, können wir das Kapazitätsfunktional mithilfe von Martingaltheorie leicht berechnen. Dies stellt einen alternativen Beweis zu [51, Lemma 3] dar. Für Mengen $C \subset K$, die endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen, benutzen wir eine in [51, Lemma 4] gezeigte Formel. Da das Kapazitätsfunktional $T_{Y_K(t)}$ die Verteilung von $Y_K(t)$ eindeutig charakterisiert, müssen sich prinzipiell Verteilungseigenschaften mithilfe des Kapazitätsfunktionals ausdrücken lassen. Bisher wurde das Kapazitätsfunktional, bis auf die aus [51] bekannten Eigenschaften, wenig untersucht. Deshalb stellen wir folgendes Problem auf.

Problem 1.1. *Können wir Verteilungseigenschaften von STIT Mosaiken mithilfe des Kapazitätsfunktionals nachweisen?*

In dieser Arbeit werden wir zwei Eigenschaften von STIT Mosaiken vorstellen, die unter Verwendung des Kapazitätsfunktionals gezeigt werden können. Die erste Eigenschaft bezieht sich auf die Mischungseigenschaft von globalen STIT Mosaiken, die schon in [36] mit einem anderen Zugang bewiesen wurde. Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode zur Verifizierung der Mischungseigenschaft stammt aus unserer Arbeit [17].

Wir bezeichnen mit \mathcal{F}^d das Mengensystem der abgeschlossenen Mengen in \mathbb{R}^d und versehen es mit einer geeigneten σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$. Weiterhin schreiben wir $T_x F$ für die Verschiebung der Menge $F \in \mathcal{F}^d$ durch den Vektor $x \in \mathbb{Z}^d$. Dann erfüllt ein globales STIT Mosaik $Y(t)$ die Mischungseigenschaft, falls für die Verteilung $\mathbb{P}_{Y(t)}$ von $Y(t)$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Y(t)}(F_1 \cap T_x F_2) = \mathbb{P}_{Y(t)}(F_1) \mathbb{P}_{Y(t)}(F_2)$$

für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$ gilt. Wegen [63, Theorem 9.3.2] lässt sich die Mischungseigenschaft auf die Eigenschaft des Kapazitätsfunktionals

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} (1 - T_{Y(t)}(C_1 \cup T_x C_2)) = (1 - T_{Y(t)}(C_1))(1 - T_{Y(t)}(C_2))$$

reduzieren. Diese Gleichheit werden wir im zweiten Abschnitt von Kapitel 3 bestätigen.

Die zweite Anwendung des Kapazitätsfunktionals beschäftigt sich mit der Varianzformel für die Gesamtoberfläche $V_{d-1}(Y_K(t))$ eines lokalen STIT Mosaiks in $K \in \mathcal{K}^d$ im isotropen Fall. Für das zweite Moment von $V_{d-1}(Y_K(t))$ ergibt sich unter Verwendung der verallgemeinerten Steiner-Formel

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^2] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} 1 - 2(1 - T_{Y_K(t)}(B_\varepsilon^d(x) \cap K)) \\ &\quad + 1 - T_{Y_K(t)}((B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K) \, dx \, dy, \end{aligned}$$

wobei $B_\varepsilon^d(x)$ die d -dimensionale Kugel in \mathbb{R}^d mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^d$ und Radius $\varepsilon > 0$ ist. Die in Abschnitt 3.3 durchgeführten Rechnungen führen schließlich zu

$$\text{Var}(V_{d-1}(Y_K(t))) = \frac{d-1}{2} \int_K \int_K \frac{1 - e^{-t\gamma_{d,0}\|x-y\|}}{\|x-y\|^2} \, dx \, dy$$

für eine gewisse Konstante $\gamma_{d,0} > 0$. Diese Formel ist bereits aus [65, Theorem 5.1] bekannt. Dort wurde ein Zugang mit Martingalthorie und der Blaschke-Petkantschin-Formel aus [63, Theorem 7.2.7] favorisiert, wobei hier ein elementarer Beweis vorgestellt wird.

Wenden wir auf die rechte Seite der letzten Gleichung sphärische Koordinaten an, so folgt

$$\text{Var}(V_{d-1}(Y_K(t))) = \frac{d(d-1)\kappa_d}{2} \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_K(ru) (1 - e^{-t\gamma_{d,0}r}) r^{d-3} \, d\nu_{d-1}(u) \, dr,$$

wobei κ_d das Volumen der Einheitskugel B_1^d und ν_{d-1} das invariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{S}^{d-1} bezeichnen. Für wachsende Beobachtungsfenster $K_R := R \cdot K$ mit $K \in \mathcal{K}^d$ und $R \rightarrow \infty$ kann man zeigen, dass

$$\text{Var}(V_{d-1}(Y_{K_R}(t))) = \frac{d(d-1)\kappa_d}{2} R^{2(d-1)} \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_K(ru) (1 - e^{-t\gamma_{d,0}Rr}) r^{d-3} \, d\nu_{d-1}(u) \, dr$$

mit dem Kovariogramm

$$\gamma_K(y) = V_d(K \cap (K \oplus \{y\})), \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

von K gilt.

In Unterabschnitt 4.2.4 wird bewiesen, dass das asymptotische Verhalten der Varianz $\text{Var}(V_{d-1}(Y_K(t)))$ durch das des eindimensionalen Kovariogrammes in $0+$ beeinflusst wird. Also liegt es nahe, Taylorentwicklungen des eindimensionalen Kovariogrammes in $0+$ zu bestimmen. In [9] konnte bereits für konvexe Körper mit 2-mal stetig differenzierbaren Rand und mit strikt positiven Hauptkrümmungen das dritte Taylorpolynom des eindimensionalen Kovariogrammes in $0+$ für den Fall $d = 2$ entwickelt werden. Unter der Voraussetzung, dass der Rand zusätzlich 3-mal stetig differenzierbar ist, konnte diese Aussage auf höhere Dimensionen in [54] verallgemeinert werden. Im Folgenden bezeichnet \mathcal{K}_+^k die Klasse aller konvexen Körper mit k -mal stetig differenzierbaren Rändern und strikt positiven Hauptkrümmungen.

Wir untersuchen zunächst in Abschnitt 4.1 das Kovariogramm der Einheitskugel B_1^d und erhalten in diesem Fall die Taylorreihe für das eindimensionale Kovariogramm von B_1^d in $0+$. Da die Einheitskugel einen glatten, d.h. unendlich oft stetig differenzierbaren, Rand mit strikt positiven Hauptkrümmungen besitzt, kann folgende Frage gestellt werden.

Problem 1.2. *Kann eine Taylorentwicklung der Ordnung $k \geq 3$ für das eindimensionale Kovariogramm von K in $0+$ angegeben werden, wenn $K \in \mathcal{K}_+^k$ gilt?*

In der Tat kann diese Frage bejaht werden. Wir zeigen, dass für alle $K \in \mathcal{K}_+^k$ mit $k \geq 3$ und für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ Konstanten $a_{d,\ell}(u)$, $\ell \in \{3, \dots, k\}$ ungerade, existieren, so dass die Taylorentwicklung der Ordnung k von $\gamma_K(\cdot u)$ in $0+$ durch

$$\gamma_K(ru) = V_d(K) - V_{d-1}(K|u^\perp)r + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k a_{d,\ell}(u)r^\ell + \mathcal{O}(r^{k+1}), \quad r \rightarrow 0+,$$

gegeben ist. Dabei beschreibt $K|u^\perp$ die orthogonale Projektion von K auf u^\perp und $\mathcal{O}(r^{k+1})$ eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{g(r)}{r^{k+1}} \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die unabhängig von x und u ist. Für die in den Unterabschnitten 4.2.1 und 4.2.2 betrachteten Anwendungen aus der Stochastischen Geometrie benötigt man eine asymptotische Entwicklung der isotroptierten Mengen-Kovarianzfunktion

$$\bar{\gamma}_K(r) = \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_K(ru) d\nu_{d-1}(u), \quad r \geq 0,$$

in $0+$. Nach Abschnitt 4.1 gilt für alle $K \in \mathcal{K}_+^k$ mit $k \geq 3$

$$\bar{\gamma}_K(r) = V_d(K) - \frac{\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \mathcal{S}(K)r + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k \hat{a}_{d,\ell}(K)r^\ell + \mathcal{O}(r^{k+1}), \quad r \rightarrow 0+,$$

für gewisse Konstanten $\hat{a}_{d,\ell}(K)$, $\ell \in \{3, \dots, k\}$ ungerade, wobei $\mathcal{S}(K)$ die Oberfläche von K bzw. den Umfang von K in $d = 2$ charakterisiert.

In Unterabschnitt 4.2.1 können wir im Modell der Gilbert Graphen unter Verwendung der asymptotischen Entwicklung der isotropierten Mengen-Kovarianzfunktion $\bar{\gamma}_K$ einen asymptotisch erwartungstreuen Schätzer für die Oberfläche $\mathcal{S}(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}_+^3$ gewinnen. Dabei kann zusätzlich die Konvergenzrate für die asymptotische Erwartungstreue des Schätzers abgelesen werden. Überdies kann in Unterabschnitt 4.2.2 in Bezug auf Poisson-Voronoi Approximationen ebenfalls mithilfe der asymptotischen Entwicklung von $\bar{\gamma}_K$ ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für $\mathcal{S}(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}_+^3$ mit einer Konvergenzrate angegeben werden.

Eine weitere Anwendung, in der die asymptotische Entwicklung des eindimensionalen Kovariogrammes vorkommt, ist das Boolesche Modell in Unterabschnitt 4.2.3. Um insbesondere eine asymptotische Entwicklung der Varianzformel des Volumens eines Booleschen Modells eingeschränkt auf einem wachsenden Beobachtungsfenster $K \in \mathcal{K}_+^k$, $k \geq 3$, zu klassifizieren, wird eine Taylorentwicklung des eindimensionalen Kovariogrammes in $0+$ benötigt.

Abschließend kommen wir auf das oben beschriebene Beispiel der Varianzformel der Gesamtoberfläche eines lokalen STIT Mosaiks in einem wachsenden Beobachtungsfenster $K \in \mathcal{K}_+^k$, $k \geq 3$, zurück. In Unterabschnitt 4.2.4 sehen wir, dass wir für den Fall $d = 2$ nur den führenden Ordnungsterm dieser Varianzformel bestimmen können. Im Gegensatz zu den anderen Anwendungen des Kovariogrammes führen hier höhere Taylorpolynome des eindimensionalen Kovariogrammes in $0+$ nicht zu weiteren Ordnungstermen. Das asymptotische Verhalten von $\text{Var}(V_1(Y_K(t)))$ ist für alle $K \in \mathcal{K}_+^k$, $k \geq 3$, und $t > 0$ durch

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = \pi V_2(K) R^2 \ln(R) + \mathcal{O}(R^2), \quad R \rightarrow \infty,$$

gegeben. Allerdings bekommen wir für $K \in \mathcal{K}^d$ mit $V_d(K) > 0$ und $d \geq 3$ die asymptotische Entwicklung

$$\text{Var}(V_{d-1}(Y_{K_R}(t))) = \tilde{c}_d(K) R^{2(d-1)}, \quad R \rightarrow \infty,$$

mit einer gewissen Konstanten $\tilde{c}_d(K) > 0$. Beide führenden Ordnungsterme wurden schon in [65] mit anderen Techniken gezeigt.

Aufbauend auf Unterabschnitt 4.2.4 untersuchen wir hauptsächlich in Kapitel 5 die asymptotische Entwicklung der Varianz der Gesamtkantenlänge $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ für $K \in \mathcal{K}^2$ mit $V_2(K) > 0$. Mittels der in Abschnitt 5.1 bewiesenen Momentenformel und der Exponentialintegrale aus Abschnitt 2.5 lässt sich zeigen, dass das asymptotische Verhalten von $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ für $t > 0$ durch

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = \pi V_2(K) R^2 \ln(R) + c(K) R^2 + \mathcal{O}(R), \quad R \rightarrow \infty,$$

mit einer gewissen Konstanten $c(K)$ gegeben ist. Diesbezüglich berechnen wir $c(K)$ für konkrete konvexe Körper in Form von Kreisen, Ellipsen und Rechtecken.

Im letzten Kapitel stellen wir die Konstruktion von MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2 vor, für die wir die MNW-Konstruktion von STIT Mosaik verwenden möchten.

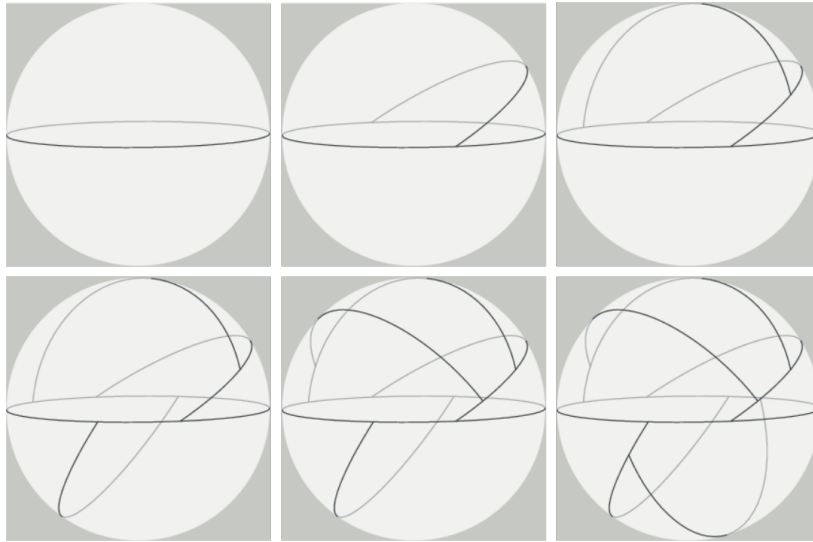


Abbildung 1.2: Entstehung eines MNW-Mosaiks auf \mathcal{S}^2 .

Problem 1.3. *Welche Vorbereitungen müssen wir für die Konstruktion von zufälligen Mosaiken auf \mathcal{S}^2 treffen und wie definieren wir geeignet ein zufälliges Mosaik auf \mathcal{S}^2 mithilfe der sogenannten MNW-Konstruktion?*

Zuerst müssen grundlegende Begriffe des sphärischen Raumes definiert und bestimmte Eigenschaften vorgestellt werden. Dafür übertragen wir in Abschnitt 6.1 die Begriffe der Polygone und der konvexen Körper aus dem euklidischen Raum auf \mathcal{S}^2 und führen die inneren Volumina für konvexe Körper auf \mathcal{S}^2 ein. Grundlegende Eigenschaften der inneren Volumina werden ebenso in Abschnitt 6.1 präsentiert und sind für die untersuchten Mittelwerte von MNW-Mosaiken auf \mathcal{S}^2 in Abschnitt 6.4 von Bedeutung. Die Definition eines Mosaiks auf \mathcal{S}^2 sieht folgendermaßen aus. Wenn die Vereinigung von endlich vielen sphärischen konvexen Polygonen, die nur gemeinsame Randpunkte besitzen, den Raum \mathcal{S}^2 überdecken, dann nennt man die Vereinigung der Ränder dieser Polygone ein Mosaik auf \mathcal{S}^2 und die Menge dieser Polygone die assoziierte Zellenmenge des Mosaiks. Dabei bezeichnen wir die Elemente der assoziierten Zellenmenge als Zellen des Mosaiks. Es liegt dann ein zufälliges Mosaik auf \mathcal{S}^2 vor, wenn jede Realisierung ein Mosaik auf \mathcal{S}^2 darstellt.

Für die Konstruktion der MNW-Mosaiken auf \mathcal{S}^2 müssen wir beachten, dass die assoziierte Zellenmenge jeder Realisierung eines zufälligen Mosaiks selbstverständlich die Euler-Poincaré-Charakteristik erfüllt. Dazu müssen wir die entsprechenden Begriffe der Knoten, Kanten, I-Segmente und Zellen von STIT Mosaiken für MNW-Mosaiken auf \mathcal{S}^2 formulieren. Des Weiteren benötigen wir den Äquator $\mathbb{A} := \{(x, y, z) \in \mathcal{S}^2 : z = 0\}$, der eine wesentliche Rolle bei der Konstruktion von MNW-Mosaiken auf \mathcal{S}^2 einnimmt. Die Konstruktion eines MNW-Mosaiks lässt sich wie folgt beschreiben:

Wir starten zur Zeit $t = 0$ mit dem Mosaik \mathbb{A} und ordnen der oberen Halbsphäre \mathcal{S}_+^2 und

der unteren Halbsphäre \mathcal{S}_-^2 , die durch den Äquator \mathbb{A} voneinander getrennt werden, unabhängig voneinander exponentialverteilte Lebenszeiten L_+ und L_- mit den Parametern $\tau_1([\mathcal{S}_+^2]) = \tau_1([\mathcal{S}_-^2]) = 1$ zu. Dabei definiert τ_1 das eindeutig bestimmte, rotationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum der Großkreise auf \mathcal{S}^2 , und $[B]$ bezeichnet für alle Borelmengen B von \mathcal{S}^2 die Menge aller Großkreise auf \mathcal{S}^2 , die einen nichtleeren Durchschnitt mit B besitzen. Ohne Einschränkung sei $L_+ < L_-$. Falls nun die Lebenszeit L_+ abgelaufen ist, so wird gemäß der (bedingten) Verteilung

$$\tau_1(\cdot \mid [\mathcal{S}_+^2]) := \frac{\tau_1(\cdot \cap [\mathcal{S}_+^2])}{\tau_1([\mathcal{S}_+^2])} = \tau_1(\cdot \cap [\mathcal{S}_+^2]) = \tau_1$$

ein Großkreis S zufällig ausgewählt, welcher \mathcal{S}_+^2 in zwei Zellen $\mathcal{S}_+^2 \cap S^+$ und $\mathcal{S}_+^2 \cap S^-$ trennt. Dabei sind S^+ und S^- die durch S eindeutig charakterisierten Halbsphären. Dann haben $\mathcal{S}_+^2 \cap S^+$ und $\mathcal{S}_+^2 \cap S^-$ ebenfalls unabhängig voneinander exponentialverteilte Lebenszeiten mit den Parametern $\tau_1([\mathcal{S}_+^2 \cap S^+]) = 1$ und $\tau_1([\mathcal{S}_+^2 \cap S^-]) = 1$. Die Konstruktion wird in jeder Zelle rekursiv fortgeführt, bis eine deterministische Zeit t erreicht wird. Die Vereinigung der Ränder der Zellen, einschließlich des Äquators, nennen wir dann ein MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2 mit Parameter t . Die Entstehung eines MNW-Mosaiks auf \mathcal{S}^2 wird durch Abbildung 1.2 veranschaulicht. Eine Anwendung von MNW-Mosaiken auf \mathcal{S}^2 könnte sein, Krakelee-Effekte, d.h. feine Risse, auf Kugeloberflächen zu modellieren.

Im Wesentlichen untersuchen wir in Abschnitt 6.4 klassische Mittelwerte, wie z.B. die erwartete Anzahl an Zellen, Kanten und I-Segmenten eines MNW-Mosaiks auf \mathcal{S}^2 . Weiterhin interessieren wir uns für die sphärische Gesamtkantenlänge sowie für die sphärische Gesamtlänge der I-Segmente. Außerdem berechnen wir bspw., aus wie vielen Kanten der Rand der typischen Zelle besteht. Abschließend werden in Abschnitt 6.5 Poissonsche Großkreismosaiken auf \mathcal{S}^2 vorgestellt. Dort können wir ebenfalls die klassischen Mittelwerte bestimmen und somit einen Vergleich zu den MNW-Mosaiken auf \mathcal{S}^2 herstellen.

Ich möchte mich ausdrücklich bei Prof. Dr. Thäle für die hervorragende Betreuung meiner Promotion und die stets lebendigen und hilfreichen Diskussionen zur Erstellung dieser Dissertation bedanken. Weiterhin gebührt ein herzlichster Dank Prof. Dr. Reitzner für das Verfassen des Zweitgutachtens. Ebenso bin ich ihm dafür dankbar, dass ich in seinem Oberseminar über das Kovariogramm vortragen durfte und er mir in der anschließenden Diskussion konstruktive Anmerkungen gab. Zudem möchte ich mich bei meinen Koautoren Prof. Dr. Thäle und Dr. Julia Hörrmann für die gemeinsamen Projekte und bei meinen Arbeitskolleginnen und -kollegen für das angenehme Arbeitsklima bedanken. Ich möchte auch dem SFB-TR 12 für seine finanzielle Unterstützung während meiner Promotion und der Ruth und Gert Massenbergs-Stiftung für das Reisestipendium zur Finanzierung der Tagungskosten für die Ulmer Stochastiktagung 2014 meinen Dank aussprechen.

Ein großer Dank gilt meiner Familie, insbesondere meinen Eltern Wilfried und Ellen Deuß. Ohne ihre Unterstützung hätte ich meinen bisherigen Lebensweg nicht realisieren können. Zu guter Letzt bin ich meiner langjährigen Lebensgefährtin Sabrina Mackenstein für ihre bedingungslose Unterstützung, Treue und Liebe bis heute unendlich dankbar.

Kapitel 2

Grundlagen

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, die der ganzen Zahlen mit \mathbb{Z} und die der reellen Zahlen mit \mathbb{R} . Für $d \in \mathbb{N}$ wird der d -dimensionale reelle Koordinatenraum mit \mathbb{R}^d gekennzeichnet. Analog definieren wir \mathbb{N}^d und \mathbb{Z}^d . Wir schreiben ∂A für den Rand und $\text{int } A$ für das Innere einer beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}^d$. Weiterhin bezeichnen wir den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in \mathbb{R}^d beschreibt. Wir versehen \mathbb{R}^d mit der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dazu bezeichnen wir mit ℓ_d das d -dimensionale Lebesgue-Maß in \mathbb{R}^d und mit $\mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion von $A \subset \mathbb{R}^d$.

Zudem schreiben wir $B_R^d(x)$ für die Kugel in \mathbb{R}^d mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^d$ und Radius $R > 0$. Zusätzlich definiert dabei κ_d das Volumen von $B_1^d := B_1^d(\mathbf{0})$ mit $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ als den Nullvektor in \mathbb{R}^d und erfüllt unter Verwendung der Gammafunktion

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-y} y^{z-1} dy, \quad z > 0,$$

die Gleichung

$$\kappa_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}, \quad (2.1)$$

siehe [62, Abschnitt 1.2]. Wir setzen zusätzlich $\kappa_0 = 1$.

Mit \mathcal{S}^{d-1} bezeichnen wir stets die Einheitskugel in \mathbb{R}^d und statt \mathcal{S}^{d-1} mit ihrer Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{S}^{d-1})$ aus. Außerdem beschreibt σ_{d-1} das $(d-1)$ -dimensionale sphärische Lebesgue-Maß auf \mathcal{S}^{d-1} mit

$$\sigma_{d-1}(A) = d \ell_d(\{sa : s \in [0, 1], a \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^{d-1}), \quad (2.2)$$

und $\nu_{d-1}(\cdot) = (d\kappa_d)^{-1} \sigma_{d-1}(\cdot)$ das normierte sphärische Lebesgue-Maß auf \mathcal{S}^{d-1} .

2.1 Integral- und Konvexgeometrie

Eine konvexe und kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ wird konvexer Körper genannt. Das Mengensystem aller konvexen Körper bezeichnen wir im Folgenden mit \mathcal{K}^d und das Mengensystem aller konvexen Körper mit positivem Volumen mit $\hat{\mathcal{K}}^d$. Wir nennen jede Hyperebene, die einen Punkt $x \in \partial K$ von $K \in \mathcal{K}^d$ trennt, Stützhyperebene an K in x . Zudem heißt eine endliche Vereinigung von konvexen Körpern polykonvex und das Mengensystem aller polykonvexen Mengen wird mit \mathcal{R}^d bezeichnet. Des Weiteren steht \mathcal{C}^d für das Mengensystem der kompakten Mengen in \mathbb{R}^d . Dazu definieren wir den Hausdorff-Abstand

$$\delta(C, C') := \max\left\{\max_{x \in C} \min_{y \in C'} d(x, y), \max_{x \in C'} \min_{y \in C} d(x, y)\right\} \quad (2.3)$$

für alle $C, C' \in \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$ und setzen $\delta(C, \emptyset) = \delta(\emptyset, C) = \infty$ für alle $C \in \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$ und $\delta(\emptyset, \emptyset) = 0$. Dies definiert die Hausdorff-Metrik auf \mathcal{C}^d . Eine äquivalente Darstellung zu (2.3) ist durch

$$\delta(C, C') = \inf\{\varepsilon > 0 : C \subset C' \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}), C' \subset C \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})\} \quad (2.4)$$

für alle $C, C' \in \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$ gegeben, wobei

$$A \oplus B := \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad A, B \subset \mathbb{R}^d,$$

die Minkowski-Summe von A und B beschreibt, vgl. dazu auch [63, Section 12.3]. Zusätzlich statten wir \mathcal{K}^d mit der auf \mathcal{K}^d eingeschränkten Hausdorff-Metrik δ aus.

Im Anschluss werden wir die inneren Volumina in \mathbb{R}^d einführen. Dabei wird das Volumen einer Menge $K \in \mathcal{K}^d$, für welches wir $V_d(K)$ schreiben, gerade das d -te innere Volumen von K charakterisieren. Alle inneren Volumina lassen sich aus der Steiner-Formel gewinnen. Dafür müssen wir für $\varepsilon \geq 0$ das Volumen des Parallelkörpers $K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ untersuchen.

Satz 2.1 (Steiner-Formel, [62, Satz 2.2.1]). *Für $K \in \mathcal{K}^d$ und $\varepsilon \geq 0$ gilt*

$$V_d(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) = \sum_{j=0}^d \varepsilon^{d-j} \kappa_{d-j} V_j(K)$$

mit Koeffizienten $V_j(K)$, die nur von K abhängen. □

Die Steiner-Formel impliziert insbesondere, dass $V_d(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))$ für jedes $K \in \mathcal{K}^d$ ein Polynom in ε ist. Den aus dieser Formel hervorgehenden Koeffizienten $V_j(K)$ nennt man für $j \in \{0, 1, \dots, d\}$ das j -te innere Volumen von K . Dabei ist $V_d(K)$ gerade das Volumen von K . Wir schreiben überdies $\varepsilon \rightarrow 0+$ für den rechtsseitigen Grenzwert von ε gegen 0. Wegen

$$2V_{d-1}(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon} \left(V_d(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) - V_d(K) \right)$$

kann man $2V_{d-1}(K)$ für $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ als die Oberfläche $\mathcal{S}(K)$ von K interpretieren, siehe hierzu auch [62, Kapitel 2]. Ebenfalls kann man zeigen, dass $V_1(K)$ bis auf einen Faktor die mittlere Breite von K beschreibt, d.h., es gilt

$$V_1(K) = \frac{d\kappa_d}{2\kappa_{d-1}} b(K),$$

siehe [62, Abschnitt 4.2]. Hierbei ist die mittlere Breite $b(K)$ als Mittelwert der Abstände je zweier, paralleler Stützhyperebenen an K zu verstehen. Außerdem erhält man wegen der Eigenschaft $V_d(\alpha K) = \alpha^d V_d(K)$ für $K \in \mathcal{K}^d$ und $\alpha > 0$ und der Stetigkeit von V_d bzgl. der Hausdorff-Metrik

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \varepsilon^{-d} V_d(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} V_d(\varepsilon^{-d} K \oplus B_1^d) = \kappa_d.$$

Andererseits liefert die Steiner-Formel

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \varepsilon^{-d} V_d(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^d \varepsilon^{-j} \kappa_{d-j} V_j(K) = \kappa_d V_0(K)$$

für alle $K \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$. Daraus ergibt sich $V_0(K) = 1$ und nach Definition $V_0(\emptyset) = 0$. Damit ist $V_0(K)$ gerade die Euler-Charakteristik für alle $K \in \mathcal{K}^d$.

Korollar 2.2. *Das innere Volumen $V_j(B_1^d)$ ist für alle $j \in \{0, 1, \dots, d\}$ durch*

$$V_j(B_1^d) = \frac{\binom{d}{j} \kappa_d}{\kappa_{d-j}}$$

gegeben.

Beweis. Einerseits ergibt sich für $\varepsilon \geq 0$

$$V_d(B_1^d \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) = (1 + \varepsilon)^d \kappa_d = \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \varepsilon^{d-j} \kappa_d.$$

Andererseits besagt die Steiner-Formel aus Satz 2.1, dass

$$V_d(B_1^d \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) = \sum_{j=0}^d \varepsilon^{d-j} \kappa_{d-j} V_j(B_1^d)$$

gilt. Ein Koeffizientenvergleich ergibt die Behauptung. \square

Als Nächstes möchten wir die Funktionale $V_j : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ genauer beschreiben und wichtige Eigenschaften vorstellen. Dazu müssen wir zunächst einige Begriffe erklären. Dabei kennzeichnet G_d die Menge der euklidischen Bewegungen in \mathbb{R}^d , wobei eine euklidische Bewegung entweder durch eine Spiegelung, Rotation oder Translation charakterisiert ist. Zudem schreiben wir SO_d für die Menge aller Rotationen in \mathbb{R}^d .

Definition 2.3 ([62, Abschnitt 2.2]). Ein Funktional $\varphi : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *additiv*, falls $\varphi(\emptyset) = 0$ und für alle $K, L \in \mathcal{K}^d$ mit $K \cup L \in \mathcal{K}^d$

$$\varphi(K \cup L) = \varphi(K) + \varphi(L) - \varphi(K \cap L)$$

gilt.

φ ist *bewegungsinvariant*, wenn $\varphi(gK) = \varphi(K)$ für alle euklidischen Bewegungen $g \in G_d$ und $K \in \mathcal{K}^d$ gilt, und *homogen vom Grad j* , $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, falls $\varphi(\alpha K) = \alpha^j \varphi(K)$ für alle $\alpha > 0$ und $K \in \mathcal{K}^d$ gilt. Zusätzlich nennen wir φ *monoton*, falls aus $K \subset L$ stets $\varphi(K) \leq \varphi(L)$ für alle $K, L \in \mathcal{K}^d$ folgt. Des Weiteren heißt φ *stetig bzgl. der Hausdorff-Metrik auf \mathcal{K}^d* , falls die Konvergenz von $\delta(K_n, K) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ die von $|\varphi(K_n) - \varphi(K)| \rightarrow 0$ für alle $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^d$ und $K \in \mathcal{K}^d$ impliziert.

Satz 2.4 ([62, Satz 2.2.2]). Das innere Volumen V_j ist für alle $j \in \{0, 1, \dots, d\}$ *additiv, bewegungsinvariant, homogen vom Grad j , monoton und stetig bzgl. der Hausdorff-Metrik auf \mathcal{K}^d* . \square

Insbesondere bilden die inneren Volumina eine Basis des \mathbb{R} -Vektorraums der additiven, bewegungsinvarianten und bzgl. der Hausdorff-Metrik stetigen Funktionale $\varphi : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 2.5 (Satz von Hadwiger, [23, Satz IV+V in Abschnitt 6.1.10]). Falls $\varphi : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ein *additives, bewegungsinvariantes und bzgl. der Hausdorff-Metrik auf \mathcal{K}^d stetiges Funktional* ist, dann existieren Konstanten $\alpha_0, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi = \sum_{j=0}^d \alpha_j V_j.$$

Falls φ *nicht zwangsläufig stetig bzgl. der Hausdorff-Metrik auf \mathcal{K}^d , aber monoton* ist, dann gilt sogar $\alpha_0, \dots, \alpha_d \geq 0$. \square

Ab sofort bezeichnen wir mit \mathcal{H}^d den Raum der Hyperebenen in \mathbb{R}^d , den wir mit der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}^d)$ versehen. Dazu definiert \mathcal{H}_0^d den Raum der linearen Hyperebenen mit der Spur- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0^d)$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H}^d)$ über \mathcal{H}_0^d und

$$\Lambda_d^{iso}(\cdot) := \int_{\mathcal{H}_0^d} \int_{H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{H_0 \oplus \{x\} \in \cdot\}} d\ell_{H_0^\perp}(x) d\psi_d(H_0) \quad (2.5)$$

das einzige G_d -invariante Maß auf $(\mathcal{H}^d, \mathcal{B}(\mathcal{H}^d))$, d.h., es gilt $\Lambda_d^{iso}(g\mathcal{H}) = \Lambda_d^{iso}(\mathcal{H})$ für alle $g \in G_d$ und für alle $\mathcal{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^d)$, siehe [62, Satz 1.3.4]. Dabei ist H_0^\perp das orthogonale Komplement von $H_0 \in \mathcal{H}_0^d$, $\ell_{H_0^\perp}$ das Lebesgue-Maß auf H_0^\perp und ψ_d das eindeutige rotationsinvariante (SO_d -invariante) Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{H}_0^d, \mathcal{B}(\mathcal{H}_0^d))$, siehe [62, Abschnitt 1.3]. Eine Anwendung des Satzes von Hadwiger führt uns zur Crofton-Formel auf \mathcal{K}^d .

Korollar 2.6 (Crofton-Formel für konvexe Körper). Für $K \in \mathcal{K}^d$ und $j \in \{0, \dots, d-1\}$ gilt

$$\int_{\mathcal{H}^d} V_j(K \cap H) d\Lambda_d^{iso}(H) = \gamma_{d,j} V_{j+1}(K)$$

mit

$$\gamma_{d,j} := \frac{\binom{d-1}{j} \kappa_{d-1} \kappa_{j+1}}{\binom{d}{j+1} \kappa_d \kappa_j}.$$

Beweis. Wir definieren das Funktional $\varphi_j : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_j(K) = \int_{\mathcal{H}^d} V_j(K \cap H) d\Lambda_d^{iso}(H).$$

Aufgrund der Additivität von V_j und der Linearität des Integrals ergibt sich die Additivität von φ_j . Da V_j und Λ_d^{iso} bewegungsinvariant sind, erbt φ_j auch diese Eigenschaft. Weiterhin liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz, verknüpft mit der Stetigkeit von V_j , ebenso die Stetigkeit von φ_j . Damit existieren nach dem Satz von Hadwiger Konstanten $\alpha_0, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_j = \sum_{k=0}^d \alpha_k V_k.$$

Als Nächstes zeigen wir, dass φ_j homogen vom Grad $j+1$ ist. Für alle $\alpha > 0$ gilt mit der Homogenität von V_j

$$\varphi_j(\alpha K) = \int_{\mathcal{H}^d} V_j(\alpha K \cap H) d\Lambda_d^{iso}(H) = \alpha^j \int_{\mathcal{H}^d} V_j(K \cap \alpha^{-1} H) d\Lambda_d^{iso}(H).$$

Ebenfalls erhält man für alle $\alpha > 0$ und $\mathcal{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^d)$

$$\begin{aligned} \Lambda_d^{iso}(\alpha \mathcal{H}) &= \int_{\mathcal{H}_0^d} \int_{H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{H_0 \oplus \{x\} \in \alpha \mathcal{H}\}} d\ell_{H_0^\perp}(x) d\psi_d(H_0) = \int_{\mathcal{H}_0^d} \int_{H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{\alpha^{-1}(H_0 \oplus \{x\}) \in \mathcal{H}\}} d\ell_{H_0^\perp}(x) d\psi_d(H_0) \\ &= \alpha \int_{\mathcal{H}_0^d} \int_{H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{\alpha^{-1} H_0 \oplus \{x\} \in \mathcal{H}\}} d\ell_{H_0^\perp}(x) d\psi_d(H_0) = \alpha \Lambda_d^{iso}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Damit ist φ_j homogen vom Grad $j+1$ und es gilt $\varphi_j = \alpha_{j+1} V_{j+1}$. Des Weiteren erhalten wir mit Korollar 2.2

$$\varphi_j(B_1^d) = \alpha_{j+1} V_{j+1}(B_1^d) = \alpha_{j+1} \frac{\binom{d}{j+1} \kappa_d}{\kappa_{d-(j+1)}}.$$

Andererseits ergibt die obige Definition von φ_j auch

$$\begin{aligned}\varphi_j(B_1^d) &= \int_{\mathcal{H}^d} V_j(B_1^d \cap H) d\Lambda_d^{iso}(H) \\ &= \int_{\mathcal{H}_0^d} \int_{H_0^\perp} V_j(B_1^d \cap (H_0 \oplus \{x\})) d\ell_{H_0^\perp}(x) d\psi_d(H_0).\end{aligned}$$

Unter der Bedingung, dass $B_1^d \cap (H_0 \oplus \{x\})$ eine $(d-1)$ -dimensionale Kugel mit Radius $r(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$ für $\|x\| < 1$ ist und V_j bewegungsinvariant ist, lässt sich Letzteres mit der Homogenität von V_j und dem Prinzip von Cavalieri vereinfachen zu

$$\begin{aligned}\varphi_j(B_1^d) &= \int_{-1}^1 V_j(B_{r(x)}^{d-1}(\mathbf{0})) dx = V_j(B_1^{d-1}) \int_{-1}^1 (1 - \|x\|^2)^{\frac{j}{2}} dx \\ &= \frac{\binom{d-1}{j} \kappa_{d-1}}{\kappa_{d-1-j}} \int_{-1}^1 (1 - \|x\|^2)^{\frac{j}{2}} dx = \frac{\binom{d-1}{j} \kappa_{d-1}}{\kappa_{d-1-j} \kappa_j} V_{j+1}(B_1^{j+1}) = \frac{\binom{d-1}{j} \kappa_{d-1} \kappa_{j+1}}{\kappa_{d-1-j} \kappa_j}.\end{aligned}$$

Setzt man nun beide charakterisierenden Gleichungen von $\varphi_j(B_1^d)$ gleich und löst diese Gleichung nach α_{j+1} auf, so liefert dies die Behauptung. \square

Eine weitere wichtige Integralformel wird durch die Kubota-Formel wiedergegeben. Dabei ist $K|u^\perp$ die orthogonale Projektion von $K \in \mathcal{K}^d$ auf den zu $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ orthogonalen Unterraum u^\perp .

Lemma 2.7 (Kubota-Formel, [63, Theorem 6.2.2]). *Es gilt*

$$\mathcal{S}(K) = \frac{d\kappa_d}{\kappa_{d-1}} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} V_{d-1}(K|u^\perp) d\nu_{d-1}(u)$$

für alle $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$. \square

Des Weiteren können wir die inneren Volumina auf das Mengensystem der polykonvexen Mengen \mathcal{R}^d erweitern. Für eine polykonvexe Menge $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$ mit $K_i \in \mathcal{K}^d$ und $m \in \mathbb{N}$ ist $V_j(K)$, $j \in \{0, \dots, d\}$ gegeben durch

$$V_j(K) := \sum_{v \in T(m)} (-1)^{\text{card } v - 1} V_j(K_v). \quad (2.6)$$

Dabei beschreibt $T(m)$ die Familie aller nichtleeren Teilmengen von $\{1, \dots, m\}$, $\text{card } v$ ist die Anzahl der Elemente von $v \in T(m)$ und für $v = \{j_1, \dots, j_\ell\}$ ist

$$K_v := K_{j_1} \cap \dots \cap K_{j_\ell}$$

gesetzt. Diese Fortsetzung der inneren Volumina auf der Menge der polykonvexen Menge ist eindeutig, siehe [62, Korollar 2.4.3]. Außerdem ist die so definierte Abbildung $V_j : \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $j \in \{0, \dots, d\}$ weiterhin additiv, homogen vom Grad j und bewegungsinvariant, jedoch nicht stetig und nicht monoton, vgl. [62, Abschnitt 2.4]. Offensichtlich kann Korollar 2.6 mithilfe der Definition aus (2.6) für polykonvexe Mengen verallgemeinert werden.

Lemma 2.8 (Crofton-Formel). *Für $K \in \mathcal{R}^d$ und $j \in \{0, \dots, d-1\}$ ergibt sich*

$$\int_{\mathcal{H}^d} V_j(K \cap H) d\Lambda_d^{iso}(H) = \gamma_{d,j} V_{j+1}(K)$$

mit

$$\gamma_{d,j} = \frac{\binom{d-1}{j} \kappa_{d-1} \kappa_{j+1}}{\binom{d}{j+1} \kappa_d \kappa_j}.$$

Weiterhin liefert [62, Abschnitt 2.4] ebenfalls eine verallgemeinerte Steiner-Formel für polykonvexe Mengen.

Lemma 2.9. *Es gilt für alle $K \in \mathcal{R}^d$ und $\varepsilon \geq 0$*

$$V_d(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) = \sum_{j=0}^d \varepsilon^{d-j} \kappa_{d-j} V_j(K).$$

2.2 Zufällige abgeschlossene Mengen

Wir schreiben \mathcal{F}^d für das Mengensystem aller abgeschlossenen Mengen in \mathbb{R}^d und definieren für alle $A \subset \mathbb{R}^d$ die Menge

$$\mathcal{F}_A^d := \{F \in \mathcal{F}^d : F \cap A \neq \emptyset\}.$$

Dabei versehen wir \mathcal{F}^d mit der von

$$\{\mathcal{F}_C^d : C \in \mathcal{C}^d\}$$

erzeugten Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$, siehe [63, Lemma 2.1.1] einschließlich der nachfolgenden Bemerkung. Damit können wir nun den Begriff der zufälligen abgeschlossenen Menge in \mathbb{R}^d vorstellen, welcher wesentlich für die Definition von STIT Mosaik ist.

Definition 2.10. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir nennen $\mathcal{Z} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}^d$ eine zufällige abgeschlossene Menge in \mathbb{R}^d , falls \mathcal{Z} eine $(\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathcal{F}^d))$ -messbare Abbildung ist. Ihre Verteilung $\mathbb{P}_{\mathcal{Z}}$ ist das Bildmaß von \mathbb{P} unter \mathcal{Z} .*

Weiterhin bezeichnen wir mit

$$T_{\mathcal{Z}}(C) := \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{F}_C^d) = \mathbb{P}(\mathcal{Z} \cap C \neq \emptyset), \quad C \in \mathcal{C}^d,$$

das Kapazitätsfunktional von \mathcal{Z} .

Satz 2.11 ([63, Theorem 2.1.3]). *Die Verteilung einer zufälligen abgeschlossenen Menge \mathcal{Z} ist eindeutig durch ihr Kapazitätsfunktional bestimmt.* \square

Wir schreiben $X \stackrel{D}{=} Y$ für Zufallsvariablen X und Y auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, falls X und Y die gleiche Verteilung besitzen.

Definition 2.12. *Eine zufällige abgeschlossene Menge \mathcal{Z} heißt stationär, falls $\mathcal{Z} \oplus \{z\} \stackrel{D}{=} \mathcal{Z}$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$ gilt. Man nennt \mathcal{Z} isotrop, falls $\vartheta \mathcal{Z} \stackrel{D}{=} \mathcal{Z}$ für alle $\vartheta \in SO_d$ ist.*

Das Kapazitätsfunktional $T_{\mathcal{Z}}$ einer zufälligen abgeschlossenen Menge kann klassifizieren, ob \mathcal{Z} stationär bzw. isotrop ist.

Korollar 2.13. *Eine zufällige abgeschlossene Menge \mathcal{Z} ist genau dann stationär, wenn ihr Kapazitätsfunktional $T_{\mathcal{Z}}$ translationsinvariant ist, d.h., $T_{\mathcal{Z}}(C \oplus \{z\}) = T_{\mathcal{Z}}(C)$ für alle $C \in \mathcal{C}^d$ und für alle $z \in \mathbb{R}^d$. Sie ist genau dann isotrop, wenn $T_{\mathcal{Z}}$ rotationsinvariant ist, d.h., $T_{\mathcal{Z}}(\vartheta C) = T_{\mathcal{Z}}(C)$ für alle $C \in \mathcal{C}^d$ und für alle $\vartheta \in SO_d$.*

Beweis. Wir erhalten für alle $C \in \mathcal{C}^d$ und $z \in \mathbb{R}^d$

$$T_{\mathcal{Z} \oplus \{z\}}(C) = \mathbb{P}((\mathcal{Z} \oplus \{z\}) \cap C \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\mathcal{Z} \cap (C \oplus \{-z\}) \neq \emptyset) = T_{\mathcal{Z}}(C \oplus \{-z\})$$

und für alle $C \in \mathcal{C}^d$ und $\vartheta \in SO_d$

$$T_{\vartheta \mathcal{Z}}(C) = \mathbb{P}(\vartheta \mathcal{Z} \cap C \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\mathcal{Z} \cap \vartheta^{-1} C \neq \emptyset) = T_{\mathcal{Z}}(\vartheta^{-1} C).$$

Mit Satz 2.11 folgt die Behauptung. \square

2.3 Punktprozesse

Wir bezeichnen mit \mathbb{M} die Menge aller Borelmaße η auf \mathbb{R}^d , welche lokal endlich sind, d.h., $\eta(C) < \infty$ für alle $C \in \mathcal{C}^d$. Wir statten \mathbb{M} mit der σ -Algebra \mathcal{M} aus, welche durch die Abbildungen $\phi_A : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\eta \mapsto \eta(A)$, mit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ generiert wird. Eine besondere Teilmenge von \mathbb{M} ist die Menge \mathbb{N} der abzählbaren Maße auf \mathbb{R}^d . Dabei nennen wir ein $\eta \in \mathbb{M}$ abzählbar, falls $\eta(A) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt. Für die Spur- σ -Algebra von \mathcal{M} über \mathbb{N} schreiben wir \mathcal{N} . Weiterhin nennen wir $\eta \in \mathbb{N}$ einfach, falls $\eta(\{x\}) \in \{0, 1\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. Die Menge aller einfachen Maße bezeichnen wir mit \mathbb{N}_e .

Definition 2.14. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir nennen $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{M}$ ein zufälliges Maß auf \mathbb{R}^d , falls η eine $(\mathcal{A} - \mathcal{M})$ -messbare Abbildung definiert. Die dazugehörige Verteilung ist dann durch das Bildmaß von \mathbb{P} unter η gegeben.*

Das Intensitätsmaß eines zufälligen Maßes auf \mathbb{R}^d ist das Maß Θ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit

$$\Theta(A) := \mathbb{E}[\eta(A)], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Ein zufälliges Maß η , welches fast sicher \mathbb{N} -wertig ist, wird auch Punktprozess genannt. Falls sogar $\eta \in \mathbb{N}_e$ fast sicher gilt, dann heißt η einfach.

Satz 2.15 (Formel von Campbell, [63, Theorem 3.1.2]). *Es sei η ein zufälliges Maß auf \mathbb{R}^d mit Intensitätsmaß Θ und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative, messbare Funktion. Dann ist $\int_{\mathbb{R}^d} f d\eta$ messbar und es gilt*

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f d\eta \right] = \int_{\mathbb{R}^d} f d\Theta.$$

Insbesondere ergibt sich

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in \eta} f(x) \right] = \int_{\mathbb{R}^d} f d\Theta,$$

falls η einfach ist. □

Essentiell für diese Arbeit ist der Begriff des homogenen Poissonschen Punktprozesses in \mathbb{R}^d , der vor allem in Kapitel 4 eine wichtige Rolle einnimmt.

Definition 2.16. *Ein Poissonscher Punktprozess η in \mathbb{R}^d mit Intensitätsmaß Θ ist ein einfacher Punktprozess η , falls Θ atomfrei ist, für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\Theta(A) < \infty$ die Zufallsvariable $\eta(A)$ eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\Theta(A)$ besitzt und für disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, die Zufallsvariablen $\eta(A_1), \dots, \eta(A_n)$ stets unabhängig sind.*

Wir nennen einen Poissonschen Punktprozess η in \mathbb{R}^d mit Intensitätsmaß Θ homogen, falls $\Theta = \lambda \cdot \ell_d$ für ein $\lambda > 0$ gilt.

Im Folgenden nennen wir einen Punktprozess η , der die Definition 2.16 erfüllt, einen homogenen Poissonschen Punktprozess in \mathbb{R}^d mit konstanter Intensität $\lambda > 0$. Zudem bezeichnen wir mit δ_x das Dirac-Maß im Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ und mit η_{\neq}^m , $m \in \mathbb{N}$, die Menge aller m -Tupel von Punkten aus η^m , deren Komponenten alle verschieden sind.

Satz 2.17 (Slivnyak-Mecke-Formel, [63, Corollary 3.2.3]). *Es sei η ein homogener Poissonscher Punktprozess in \mathbb{R}^d mit konstanter Intensität $\lambda > 0$. Dann ist*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \eta_{\neq}^m} f(\eta, x_1, \dots, x_m) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} [f(\eta + \sum_{j=1}^m \delta_{x_j}, x_1, \dots, x_m)] d\Theta(x_1) \cdots d\Theta(x_m) \end{aligned}$$

für alle nichtnegativen und messbaren Funktionen $f : \mathbb{N} \times (\mathbb{R}^d)^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit $m \in \mathbb{N}$. □

2.4 STIT Mosaik

Eine Menge $P \subset \mathbb{R}^d$ heißt polyedrisch, falls P ein Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen ist. Ist eine polyedrische Menge P beschränkt, dann nennen wir

P ein (konvexes) Polytop. Mit \mathcal{P}^d bezeichnen wir das Mengensystem aller Polytope und mit \mathcal{P}_0^d das Mengensystem aller Polytope P mit $\text{int } P \neq \emptyset$. Als Nächstes möchten wir den Begriff eines Mosaiks auf \mathbb{R}^d vorstellen.

Definition 2.18. *Es sei \hat{T} eine abzählbare Teilmenge von \mathcal{P}_0^d , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

- (a) \hat{T} ist lokal endlich, d.h., jedes Kompaktum in \mathbb{R}^d hat einen nichtleeren Durchschnitt mit endlich vielen Elementen aus \hat{T} .
- (b) Es gilt $\text{int } c \cap \text{int } c' = \emptyset$ für alle $c, c' \in \hat{T}$ mit $c \neq c'$.
- (c) Die Elemente von \hat{T} überdecken den Raum \mathbb{R}^d , d.h.,

$$\bigcup_{c \in \hat{T}} c = \mathbb{R}^d.$$

Dann definiert

$$T := \bigcup_{c \in \hat{T}} \partial c \in \mathcal{F}^d$$

ein Mosaik auf \mathbb{R}^d . Zudem heißt \hat{T} die assoziierte Zellenmenge zu T .

Den Raum aller Mosaik auf \mathbb{R}^d bezeichnen wir mit \mathcal{T}^d und versehen ihn mit der Spur- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{T}^d)$ von $\mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$ über \mathcal{T}^d . Für ein $T \in \mathcal{T}^d$ und ein $K \in \mathcal{K}^d$ nennen wir $T_K := T \cap K$ ein lokales Mosaik in K und $\hat{T}_K := \hat{T} \cap K := \{c \cap K : c \in \hat{T}\}$ die assoziierte Zellenmenge zu T_K , deren Elemente wir als Zellen bezeichnen. Den Raum aller lokalen Mosaik in $K \in \mathcal{K}^d$ identifizieren wir mit \mathcal{T}_K^d und statten ihn mit der Spur- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{T}_K^d)$ von $\mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$ über \mathcal{T}_K^d aus. Für einen zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist ein zufälliges Mosaik auf $K \in \mathcal{K}^d$ eine $(\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathcal{T}_K^d))$ -messbare Abbildung von Ω nach \mathcal{T}_K^d .

Im Gegensatz zum G_d -invarianten Maß auf $(\mathcal{H}^d, \mathcal{B}(\mathcal{H}^d))$ in (2.5) betrachten wir im Folgenden mit

$$\Lambda_d(\cdot) := \int_{\mathcal{H}_0^d} \int_{H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{H_0 \oplus \{x\} \in \cdot\}} d\ell_{H_0^\perp}(x) d\Lambda_d^0(H_0) \quad (2.7)$$

nur noch ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathcal{H}^d, \mathcal{B}(\mathcal{H}^d))$. Dabei ist Λ_d^0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{H}_0^d mit der Eigenschaft, dass Hyperebenen $H_1, \dots, H_d \in \mathcal{H}_0^d$ mit linear unabhängigen Normalenvektoren existieren, so dass $\{H_1, \dots, H_d\} \subset \text{supp } \Lambda_d^0$ gilt. Mit $\text{supp } \Lambda_d^0$ bezeichnen wir den Träger von Λ_d^0 . Zudem definieren wir für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Menge

$$[B] := \{H \in \mathcal{H}^d : B \cap H \neq \emptyset\}.$$

Lemma 2.19. *Die Funktion $\Lambda_d([\cdot])$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist homogen vom Grad 1.*

Beweis. Für das isotrope Maß $\Lambda_d = \Lambda_d^{iso}$ haben wir diese Aussage schon im Beweis von Korollar 2.6 nachgerechnet. Allgemein erhalten wir

$$\begin{aligned}\Lambda_d([\alpha B]) &= \int \int_{\mathcal{H}_0^d H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{H_0 \oplus \{x\} \in \alpha B\}} d\ell_{H_0^\perp}(x) d\Lambda_d^0(H_0) \\ &= \int \int_{\mathcal{H}_0^d H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{\alpha^{-1}H_0 \oplus \{\alpha^{-1}x\} \in B\}} d\ell_{H_0^\perp}(x) d\Lambda_d^0(H_0) \\ &= \alpha \int \int_{\mathcal{H}_0^d H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{H_0 \oplus \{x\} \in B\}} d\ell_{H_0^\perp}(x) d\Lambda_d^0(H_0) = \alpha \Lambda_d([B])\end{aligned}$$

für alle $\alpha > 0$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. □

Für $T \in \mathcal{T}_K^d$, $K \in \mathcal{K}^d$, mit $c \in \hat{T}$ und $H \in [c]$ ist das Mosaik $\mathcal{O}_{c,H}(T) \in \mathcal{T}_K^d$ durch

$$\mathcal{O}_{c,H}(T) := T \cup (c \cap H)$$

gegeben. Mit anderen Worten ist $\mathcal{O}_{c,H}(T)$ das Mosaik, das aus T entsteht, wenn die Zelle c durch die Hyperebene H in zwei Zellen geteilt wird. Für die Definition eines lokalen STIT Mosaiks benötigen wir die Theorie der Markoff-Prozesse, auf die wir nicht weiter eingehen möchten. Daher verweisen wir lediglich auf [31, Chapter 8]. Die folgende Definition beruht auf der Beschreibung aus [66].

Definition 2.20. *Es sei $K \in \mathcal{K}^d$ mit $\Lambda_d([K]) > 0$ gegeben. Dann wird ein lokales STIT Mosaik in K mit der Initialisierung $Y_K(0) := \emptyset$ und $\hat{Y}_K(0) := K$ durch den zeitstetigen Markoff-Prozess $(Y_K(t))_{t \geq 0}$ auf \mathcal{T}_K^d charakterisiert, dessen infinitesimaler Generator \mathbb{L} für beschränkte und messbare Funktionen $F : \mathcal{T}_K^d \rightarrow \mathbb{R}$ durch*

$$\mathbb{L}F(T) := \sum_{c \in \hat{T} [c]} \int [F(\mathcal{O}_{c,H}(T)) - F(T)] d\Lambda_d(H), \quad T \in \mathcal{T}_K^d, \quad (2.8)$$

gegeben ist.

Bemerkung 2.21. *Der infinitesimale Generator aus der Definition 2.20 kann auch als*

$$\mathbb{L}F(T) = \int \sum_{[K]} [F(T \cup f) - F(T)] d\Lambda_d(H), \quad T \in \mathcal{T}_K^d, \quad (2.9)$$

für alle beschränkten und messbaren Funktionen $F : \mathcal{T}_K^d \rightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden, wobei analog zu oben $\hat{T} \cap H := \{c \cap H : c \in \hat{T}\}$ gilt. Wir werden im Folgenden sowohl diese als auch die Darstellung aus (2.8) für den infinitesimalen Generator verwenden.

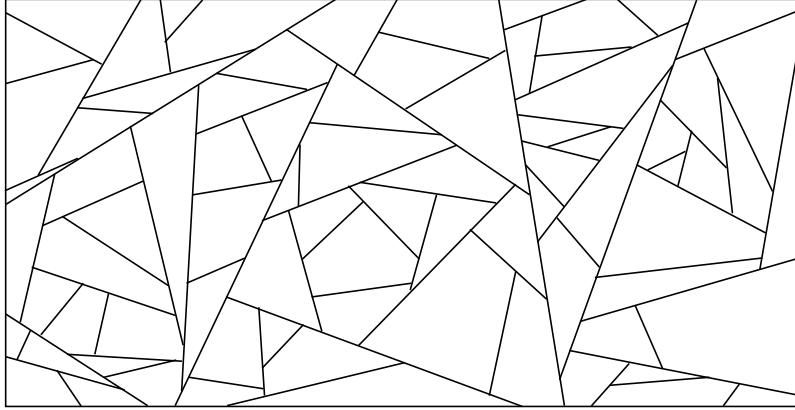


Abbildung 2.1: Realisierung eines lokalen STIT Mosaiks in einem Rechteck.

Entsprechend der Definition 2.20 kann die Konstruktion eines lokalen STIT Mosaiks in (einem Beobachtungsfenster) $K \in \mathcal{K}^d$ mit $\Lambda_d([K]) > 0$ wie folgt wiedergegeben werden: Wir starten zur Zeit $t = 0$ mit der Zelle K und ordnen ihr eine exponentialverteilte Lebenszeit L mit Parameter $\Lambda_d([K])$ zu. Falls diese Lebenszeit L endet, wird zufällig eine Hyperebene H gemäß der Verteilung $\Lambda_d([K])^{-1}\Lambda_d(\cdot \cap [K])$ auf $(\mathcal{H}^d, \mathcal{B}(\mathcal{H}^d))$ gewählt, die die Zelle K in zwei Zellen $K^+ := K \cap H^+$ und $K^- := K \cap H^-$ teilt, wobei H^+ und H^- die durch H erzeugten Halbräume sind. Dann besitzen die Zellen K^+ und K^- voneinander unabhängige Lebenszeiten L_+ und L_- , welche ebenfalls exponentialverteilt mit den Parametern $\Lambda_d([K^+])$ und $\Lambda_d([K^-])$ sind. Die Konstruktion wird in jeder Zelle rekursiv fortgesetzt und $Y_K(t)$ ist das lokale Mosaik in K zur Zeit t . Eine Realisierung eines lokalen STIT Mosaiks in einem Rechteck ist durch Abbildung 2.1 gegeben.

Bemerkung 2.22. *Die Originalbeschreibung von lokalen STIT Mosaiken stammt aus [51], welche eine andere als die hier vorgestellte Konstruktion verwendet:*

Wir betrachten zwei voneinander unabhängige Folgen $(L_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$, wobei L_j unabhängig, identisch exponentialverteilt mit Parameter $\Lambda_d([K])$ und H_j unabhängig, identisch verteilt gemäß der Verteilung $\Lambda_d([K])^{-1}\Lambda_d(\cdot \cap [K])$ sind. Wir starten in $t = 0$ mit der Zelle K , welche eine Lebenszeit L_1 besitzt. Falls diese abgelaufen ist, wird diese Zelle von der Hyperebene H_1 in zwei Zellen K^+ und K^- geteilt. Dabei besitzt K^+ die Lebenszeit L_2 und K^- die Lebenszeit L_3 , wobei ohne Einschränkung $L_2 < L_3$ gilt. Falls $H_2 \in [K^+]$ gilt, so wird die Zelle K^+ bei abgelaufener Lebenszeit L_2 gemäß der Hyperebene H_2 in zwei Zellen geteilt. Für $H_2 \notin [K^+]$ verlängert sich die Lebenszeit von K^+ um L_4 . Die Konstruktion wird solange rekursiv fortgeführt, bis man zu einer deterministischen Zeit t angelangt ist. Beide Konstruktionen führen zu der gleichen Lebenszeit einer Zelle $c \in \hat{Y}_K(t)$. Wir erinnern daran, dass für $n \in \mathbb{N}$ die n -fache Faltung von Exponentialverteilungen mit Parameter $\lambda > 0$ eine Gammaverteilung $\Gamma(n, \lambda)$ mit den Parametern n und λ liefert. Die Gammaverteilung

$\Gamma(n, \lambda)$ besitzt die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$x \mapsto \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x).$$

Wir setzen $p := \Lambda_d([K])^{-1} \Lambda_d([c])$ für $c \subset K$. Zusätzlich nehmen wir an, dass c zu einer Zeit $s_0 \in (0, t)$ als eine Zelle von $\hat{Y}_K(s_0)$ geboren wird. Ohne Einschränkung beginnen die zu c assoziierten Lebenszeiten und Hyperebenen bei $j = 1$, d.h., zur Zeit L_1 wird entweder die Zelle c geteilt, falls $H_1 \in [c]$, oder die Lebenszeit von c verlängert sich um L_2 , falls $H_1 \notin [c]$, usw. Dann erhalten wir mit $\bigcap_{j=1}^0 \{H_j \notin c\} := \mathcal{H}^d$ und dem Satz von der majorisierten Konvergenz für $s, s_0 > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(c \text{ hat die Lebenszeit } s \mid c \text{ wurde zu einer Zeit } s_0 \text{ als eine Zelle von } \hat{Y}_K(s_0) \text{ geboren}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{i-1} \{H_j \notin c\} \cap \{H_i \in c\} \cap \left\{\sum_{k=1}^i L_k \leq s\right\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^i L_k \leq s\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \int_0^s \frac{\Lambda_d([K])^i}{\Gamma(i)} e^{-\Lambda_d([K])x} x^{i-1} dx \\ &= p \Lambda_d([K]) \int_0^s e^{-\Lambda_d([K])x} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x(1-p)\Lambda_d([K]))^{i-1}}{(i-1)!}\right) dx \\ &= \Lambda_d([c]) \int_0^s e^{-\Lambda_d([K])x} e^{x(1-p)\Lambda_d([K])} dx \\ &= \int_0^s \Lambda_d([c]) e^{-\Lambda_d([c])x} dx = 1 - e^{-\Lambda_d([c])s}. \end{aligned}$$

Für ein lokales STIT Mosaik $Y_K(t)$ mit $K \in \mathcal{K}^d$ und $\Lambda_d([K]) > 0$ nennen wir P ein maximales Polytop der Dimension $d-1$ von $Y_K(t)$, falls eine Hyperebene $H \in \mathcal{H}^d$ existiert, so dass H zu einer Zeit $s \leq t$ eine Zelle $c \in \hat{Y}_K(s)$ mit der Eigenschaft $P = c \cap H$ teilt. Das Mengensystem dieser Mengen bezeichnen wir mit $\text{MP}_{d-1}(Y_K(t))$. Offensichtlich gilt

$$\bigcup_{P \in \text{MP}_{d-1}(Y_K(t))} P = Y_K(t).$$

Für $d = 2$ spricht man auch von maximalen Segmenten oder I-Segmenten.

Ein hilfreiches Werkzeug für diese Arbeit ist das folgende Lemma.

Lemma 2.23 ([31, Lemma 19.21]). *Der stochastische Prozess*

$$\left(F(Y_K(t)) - F(Y_K(0)) - \int_0^t \mathbb{L}F(Y_K(s)) \, ds \right)_{t \geq 0}$$

ist für eine beschränkte und messbare Funktion $F : \mathcal{T}_K^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $K \in \mathcal{K}^d$ und $\Lambda_d([K]) > 0$ ein Martingal bzgl. der von $(Y_K(s))_{0 \leq s \leq t}$ induzierten Filtrierung, wobei \mathbb{L} für den Generator aus Definition 2.20 steht.

Abschließend möchten wir noch zwei weitere Eigenschaften vorstellen. Zum einen nennen wir $Y(t) \in \mathcal{T}^d$ für ein $t > 0$ mit $Y(0) := \emptyset$ ein globales STIT Mosaik, falls

$$Y(t) \cap K \stackrel{D}{=} Y_K(t)$$

für alle $K \in \mathcal{K}^d$ mit $\Lambda_d([K]) > 0$ erfüllt ist. Wegen [63, Theorem 2.3.1] ist die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Zufallsvariable stets gesichert. Globale STIT Mosaik haben die Eigenschaft, dass sie unter einer bestimmten Iteration, welche für den weiteren Verlauf unwesentlich ist, stabil sind, wobei das Wort STIT sich aus den englischen Begriffen 'stable' und 'iteration' zusammensetzt. Für die Verifizierung dieser Eigenschaft und zusätzliche Informationen verweisen wir auf [51, Section 3]. Zum anderen gilt im Fall $\Lambda_d = \Lambda_d^{iso}$ für j -dimensionale affine Unterräume E_j , $j \in \{1, \dots, d-1\}$, die Beziehung

$$Y(t) \cap E_j \stackrel{D}{=} Y(t\tilde{\gamma}_{d,j}, E_j) \tag{2.10}$$

mit

$$\tilde{\gamma}_{d,j} = \frac{j\kappa_j}{(j+1)\kappa_{j+1}} \frac{(d+1)\kappa_{d+1}}{d\kappa_d},$$

siehe [66, Theorem 1] in Kombination mit [44, (3.29T)]. Unter der Berücksichtigung, dass E_j isomorph zu \mathbb{R}^j ist, ist $Y(t\tilde{\gamma}_{d,j}, E_j)$ als $Y(t\tilde{\gamma}_{d,j}) \in \mathcal{T}^j$ zu verstehen.

2.5 Exponentialintegrale

In diesem Abschnitt werden zwei Exponentialintegrale eingeführt, welche insbesondere für Kapitel 4 wichtig sind. Das erste zu betrachtende Exponentialintegral E_1 ist durch

$$E_1(x) := \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} \, dy, \quad x > 0, \tag{2.11}$$

definiert. Im weiteren Verlauf schreiben wir $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$ und $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$. Das kommende Lemma wird uns zeigen, dass diese Funktion durch elementare Funktionen abgeschätzt werden kann. Diese Abschätzungen sind bereits aus [1, 5.1.20] bekannt.

Lemma 2.24. Die Funktion E_1 erfüllt die Abschätzungen

$$\frac{e^{-x}}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) < E_1(x) < e^{-x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

für alle $x > 0$.

Beweis. Wir konzentrieren uns zunächst auf die obere Schranke. Dafür erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{-x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy &= \int_x^\infty \left[e^{-y} \ln \left(1 + \frac{1}{y} \right) - e^{-y} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y} \right) - \frac{e^{-y}}{y} \right] dy \\ &= \int_x^\infty e^{-y} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{y} \right) - \frac{1}{y+1} \right] dy. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Funktion $f(y) := \ln \left(1 + \frac{1}{y} \right) - \frac{1}{y+1}$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$. Außerdem ist f streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{>0}$, da die erste Ableitung die Eigenschaft

$$f'(y) = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y} + \frac{1}{(y+1)^2} = \frac{(y+1)y - (y+1)^2 + y}{y(y+1)^2} = -\frac{1}{y(y+1)^2} < 0$$

für alle $y > 0$ erfüllt. Mit $\lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = \infty$ und $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = 0$ folgt insgesamt, dass der Integrand des letzten Integrals strikt positiv ist. Damit ist das Integral ebenfalls strikt positiv und die angegebene Funktion definiert die gewünschte obere Schranke.

Für die untere Schranke gehen wir ähnlich vor. Wie oben erreichen wir

$$\begin{aligned} &\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy - \frac{e^{-x}}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \\ &= \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} + \frac{1}{2} \left[-e^{-y} \ln \left(1 + \frac{2}{y} \right) + e^{-y} \left(\frac{1}{y+2} - \frac{1}{y} \right) \right] dy \\ &= \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{2} \left(\frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} + \ln(y) - \ln(y+2) \right) dy =: \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{2} g(y) dy. \end{aligned}$$

Die Funktion g ist ebenfalls stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} g'(y) &= -\frac{1}{(y+2)^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+2} = \frac{-y^2 - (y+2)^2 + y(y+2)^2 - y^2(y+2)}{y^2(y+2)^2} \\ &= \frac{-y^2 - (y^2 + 4y + 4) + y(y^2 + 4y + 4) - y^3 - 2y^2}{y^2(y+2)^2} \\ &= \frac{-4}{y^2(y+2)^2} < 0 \end{aligned}$$

für alle $y > 0$. Wegen $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = \infty$ und $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 0$ ist g auch strikt positiv auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Dies garantiert die untere Schranke und die Behauptung folgt. \square

Überdies definieren wir ein weiteres Exponentialintegral Ein mit

$$\text{Ein}(x) := \int_0^x \frac{1 - e^{-y}}{y} dy, \quad x > 0. \quad (2.12)$$

Da

$$e^x \geq 1 + x, \quad x \in \mathbb{R},$$

ist Ein(x) für alle $x > 0$ wohldefiniert. Wir werden im nächsten Lemma sehen, dass man das eine Exponentialintegral in das andere überführen kann, siehe dazu auch [1, Chapter 5]. Dafür wird die Euler-Mascheroni-Konstante

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \quad (2.13)$$

nützlich sein.

Lemma 2.25. *Für alle $x > 0$ gilt*

$$E_1(x) = \text{Ein}(x) - \ln(x) - \gamma.$$

Beweis. Es reicht

$$\gamma = \text{Ein}(x) - E_1(x) - \ln(x)$$

für alle $x > 0$ zu zeigen. Offenbar ist die Funktion auf der rechten Seite stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit verschwindender erster Ableitung und muss demnach konstant sein. Das Einsetzen von $x = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} \text{Ein}(1) - E_1(1) - \ln(1) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \left(\int_s^1 \frac{1}{y} dy - \int_s^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \left(-\ln(s) - \left[e^{-y} \ln(y) \right]_s^\infty - \int_s^\infty e^{-y} \ln(y) dy \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \left(\ln(s)(e^{-s} - 1) - \int_s^\infty e^{-y} \ln(y) dy \right) = - \int_0^\infty e^{-y} \ln(y) dy. \end{aligned}$$

Das letzte Integral wird, wie wir später sehen werden, die erste Ableitung der Gammafunktion Γ im Punkt $z = 1$ sein. Um dies zu verifizieren, benötigen wir den Satz über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen. Da wir uns für die Ableitung in $z = 1$ interessieren, definieren wir die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \times (\frac{1}{2}, 2) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(y, z) = e^{-y} y^{z-1}$. Auf der einen Seite ist die eindimensionale Funktion $y \mapsto f(y, z)$ integrierbar für ein festes $z \in (\frac{1}{2}, 2)$, auf

der anderen Seite ist aber auch die eindimensionale Funktion $z \mapsto f(y, z)$ differenzierbar für festes $y > 0$. Des Weiteren majorisiert die Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$g(y) = \mathbb{1}_{(0,1)}(y)y^{-\frac{1}{2}} + \mathbb{1}_{[1,\infty)}(y)e^{-y}y$$

die Funktion f absolut und ist gemäß

$$\int_0^{\infty} g(y) dy = \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} dy + \int_1^{\infty} e^{-y}y dy \leq 2 + \Gamma(2) = 3$$

integrierbar. Aus diesem Grund ist Γ differenzierbar auf $(\frac{1}{2}, 2)$ mit der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} \Gamma'(z) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial z}(z) = \frac{\partial \left(\int_0^{\infty} e^{-y} \exp((\cdot - 1) \ln(y)) dy \right)}{\partial z}(z) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-y} \ln(y) e^{(z-1) \ln(y)} dy. \end{aligned}$$

Daraus resultiert

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-y} \ln(y) dy.$$

Gemäß [25, 150.3 Satz] genügt Γ der Limesbeziehung

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}, \quad z > 0,$$

und daher ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1) \cdots (z+n)}{n!n^z} = z \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{z+k}{k} \right) \frac{1}{(n+1)^z} \frac{(n+1)^z}{n^z} \\ &= z \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) \exp \left(-z \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) \right) \end{aligned}$$

für alle $z > 0$. Dies liefert mit der Stetigkeit von \ln

$$\ln \left(\frac{1}{\Gamma(z)} \right) = \ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{z}{k} \right) - z \ln \left(\frac{k+1}{k} \right), \quad z > 0,$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\ln \left(\frac{1}{\Gamma(\cdot)} \right) \right)}{\partial z}(1) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \frac{1}{k} - \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \gamma. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\partial \left(\ln \left(\frac{1}{\Gamma(\cdot)} \right) \right)}{\partial z} (1) = - \frac{\partial \left(\ln (\Gamma(\cdot)) \right)}{\partial z} (1) = - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\Gamma'(1)$$

folgt die Behauptung. □

Eine Kombination von Lemma 2.24 mit Lemma 2.25 ergibt unmittelbar

Korollar 2.26. *Für alle $x > 0$ gilt*

$$\ln(x) + \gamma + \frac{e^{-x}}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) < \text{Ein}(x) < \ln(x) + \gamma + e^{-x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Kapitel 3

Das Kapazitätsfunktional von STIT Mosaiken

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem Kapazitätsfunktional von STIT Mosaiken. Da die Verteilung jedes STIT Mosaiks eindeutig durch sein Kapazitätsfunktional bestimmt ist, lassen sich Eigenschaften von STIT Mosaiken mithilfe des Kapazitätsfunktionals zeigen. Wir werden sehen, dass globale STIT Mosaiken die Mischungseigenschaft erfüllen und somit ebenfalls ergodisch sind. Weiterhin können wir die ersten beiden Momente der Gesamtoberfläche (Gesamtkantenlänge im ebenen Fall) eines lokalen STIT Mosaiks auf das Kapazitätsfunktional zurückführen und berechnen.

3.1 Eigenschaften des Kapazitätsfunktionals

Das Kapazitätsfunktional eines lokalen STIT Mosaiks $Y_K(t)$ in K ist durch

$$T_{Y_K(t)}(C) = \mathbb{P}(Y_K(t) \cap C \neq \emptyset), \quad C \in \mathcal{C}^d, \quad (3.1)$$

gegeben und bestimmt nach Satz 2.11 die Verteilung von $Y_K(t)$ eindeutig. Die Berechnung von $T_{Y_K(t)}$ hängt im Wesentlichen von der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von C ab. Das folgende Lemma wird das Kapazitätsfunktional für zusammenhängende Mengen $C \in \mathcal{C}^d$ untersuchen, welches bereits in [51, Lemma 3] mit anderen Techniken als hier gezeigt wurde.

Lemma 3.1. *Falls $C \in \mathcal{C}^d$ mit $C \subset K$ zusammenhängend ist, so gilt für $t \geq 0$*

$$1 - T_{Y_K(t)}(C) = \mathbb{P}(Y_K(t) \cap C = \emptyset) = e^{-t\Lambda_d([C])}. \quad (3.2)$$

Beweis. Für $t = 0$ ist die Aussage offensichtlich wahr. Wir erinnern uns, dass der stochastische Prozess

$$\left(F(Y_K(t)) - F(Y_K(0)) - \int_0^t \mathbb{L}F(Y_K(s)) \, ds \right)_{t \geq 0}$$

für alle beschränkten Funktionen F auf \mathcal{T}_K^d ein Martingal bzgl. der kanonischen Filtrierung zu $(Y_K(s))_{0 \leq s \leq t}$ ist, wobei \mathbb{L} gemäß Definition 2.20 den Generator von $(Y_K(t))_{t \geq 0}$ beschreibt. Wir setzen $F(Y_K(t)) = \mathbb{1}_{\{Y_K(t) \cap C = \emptyset\}}$ für $C \in \mathcal{C}^d$ zusammenhängend. Wegen der Martingaleigenschaft erhalten wir für den Erwartungswert von $F(Y_K(t))$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_K(t) \cap C = \emptyset) &= \mathbb{E}[F(Y_K(t))] = \mathbb{E}[F(Y_K(0))] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{L}F(Y_K(s)) \, ds\right] \\
&= 1 + \int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_K(s)[c]} \int F(\mathcal{O}_{c,H}(Y_K(s))) - F(Y_K(s)) \, d\Lambda_d(H)\right] \, ds \\
&= 1 + \int_0^t \mathbb{E}\left[-\sum_{c \in \hat{Y}_K(s)[c]} \int \mathbb{1}_{\{C \subset c\}} \mathbb{1}_{\{C \cap H \neq \emptyset\}} \, d\Lambda_d(H)\right] \, ds \\
&= 1 - \int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_K(s)} \mathbb{1}_{\{C \subset c\}} \int_{[c]} \mathbb{1}_{\{C \cap H \neq \emptyset\}} \, d\Lambda_d(H)\right] \, ds \\
&= 1 - \Lambda_d([C]) \int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_K(s)} \mathbb{1}_{\{C \subset c\}}\right] \, ds \\
&= 1 - \Lambda_d([C]) \int_0^t \mathbb{P}(Y_K(s) \cap C = \emptyset) \, ds.
\end{aligned}$$

Dies liefert uns unmittelbar die lineare Integralgleichung

$$y(t) = 1 - \Lambda_d([C]) \int_0^t y(s) \, ds \quad \text{mit } y(0) = 1,$$

welche die eindeutige Lösung $y(t) = e^{-t\Lambda_d([C])}$ besitzt. \square

Man sieht schnell ein, dass sich die Beweismethode zu Lemma 3.1 nicht auf allgemeinere Mengen übertragen lässt. Um das Kapazitätsfunktional für allgemeine kompakte Mengen zu bestimmen, werden schließlich andere Hilfsmittel benötigt. In den nachfolgenden Ausführungen wird mit $\text{conv } C$ die konvexe Hülle der Menge $C \in \mathcal{C}^d$ und mit \mathcal{C}_0^d die Menge aller kompakten Mengen mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten bezeichnet. Zunächst einmal halten wir fest, dass eine kompakte Menge C mit nichtleerem Inneren höchstens nur aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten bestehen kann. Denn wegen der Abgeschlossenheit existiert ein universelles $\delta > 0$, so dass der Abstand von zwei beliebigen Zusammenhangskomponenten Z_1, Z_2 die Bedingung

$$\text{dist}(Z_1, Z_2) := \inf_{y_1 \in Z_1, y_2 \in Z_2} \|y_1 - y_2\| > \delta$$

erfüllt. Insbesondere kann damit die Anzahl der Zusammenhangskomponenten höchstens abzählbar unendlich sein. Diese muss aber aufgrund der Beschränktheit von C sogar endlich sein. Mit ähnlicher Argumentation ergibt sich, dass $C \in \mathcal{C}^d$ höchstens abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen kann. Somit schreiben wir $C = \bigcup_{i=1}^k C_i \in \mathcal{C}_0^d$, $k \geq 2$, als disjunkte Vereinigung von zusammenhängenden Mengen $C_i \in \mathcal{C}^d$. Weiterhin definieren wir die Mengen

$$\{Z_1, Z_2\} = \left\{ \bigcup_{i \in I} C_i, \bigcup_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus I} C_j \right\}$$

für nichtleere Teilmengen $I \subset \{1, \dots, k\}$ mit Kardinalität $\text{card } I < k$. Zusätzlich steht \sum_{Z_1, Z_2} für die Summe über diese Mengen, und $[Z_1|Z_2]$ beschreibt die Menge aller Hyper-ebenen, welche Z_1 und Z_2 trennen. Damit kann man das Kapazitätsfunktional $T_{Y_K(t)}$ mit Beobachtungsfenster $K \in \mathcal{K}^d$ und $\Lambda_d([K]) > 0$ für kompakte Mengen mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten bestimmen.

Lemma 3.2 ([51, Lemma 4]). *Es gilt für $t \geq 0$*

$$\begin{aligned} 1 - T_{Y_K(t)}(C) &= e^{-t\Lambda_d(\text{conv } C)} + t \sum_{Z_1, Z_2} \Lambda_d([Z_1|Z_2]) \\ &\quad \times \int_0^1 e^{-t\Lambda_d(\text{conv } C)s} (1 - T_{Y_K(t(1-s))}(Z_1))(1 - T_{Y_K(t(1-s))}(Z_2)) ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

für alle $C \in \mathcal{C}_0^d$ mit $C \subset K$. □

Das Kapazitätsfunktional $T_{Y_K(t)}$ auf \mathcal{C}_0^d legt bereits die Verteilung von $Y_K(t)$ eindeutig fest, vgl. dazu [48, Theorem 2.4] und die dort anschließende Diskussion. Wegen

$$Y(t) \cap K \stackrel{D}{=} Y_K(t), \quad t > 0,$$

für alle $K \in \mathcal{K}^d$ mit $\Lambda_d([K]) > 0$ ist ein globales STIT Mosaik $Y(t)$ auch eindeutig durch sein Kapazitätsfunktional

$$T_{Y(t)}(C) = \mathbb{P}(Y(t) \cap C \neq \emptyset), \quad C \in \mathcal{C}_0^d,$$

charakterisiert, da zu jedem $C \in \mathcal{C}_0^d$ ein $C \subset K \in \mathcal{K}^d$ existiert, so dass

$$T_{Y(t)}(C) = T_{Y_K(t)}(C)$$

gilt. Somit gelten die Formeln (3.2) und (3.3) entsprechend für $T_{Y(t)}$. Mit Korollar 2.13 und den oben verifizierten Formeln zum Kapazitätsfunktional ergibt sich unmittelbar die folgende Aussage.

Korollar 3.3. Für alle $t \geq 0$ ist $Y(t)$ stets stationär. Falls sogar $\Lambda_d = \Lambda_d^{iso}$ gilt, dann ist $Y(t)$ isotrop.

Weiterhin können wir eine wichtige Eigenschaft von globalen STIT Mosaiken mithilfe des Kapazitätsfunktional festhalten.

Lemma 3.4 ([51, Lemma 5 (ii)]). Für alle $t > 0$ gilt

$$tY(t) \stackrel{D}{=} Y(1).$$

Beweis. Für alle $t > 0$ und $C \in \mathcal{C}^d$ gilt

$$T_{tY(t)}(C) = T_{Y(t)}(t^{-1}C).$$

Wegen der Homogenität von $\Lambda_d([\cdot])$ und Lemma 3.1 bekommen wir für alle zusammenhängenden Mengen C und $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} 1 - T_{\alpha Y(t)}(C) &= 1 - T_{Y(t)}(\alpha^{-1}C) = e^{-t\Lambda_d([\alpha^{-1}C])} = e^{-t\alpha^{-1}\Lambda_d([C])} \\ &= 1 - T_{Y(t\alpha^{-1})}(C) \end{aligned} \quad (3.4)$$

und somit insbesondere für $\alpha = t$

$$1 - T_{tY(t)}(C) = 1 - T_{Y(1)}(C).$$

Andererseits erhalten wir rekursiv für $C \in \mathcal{C}_0^d$ gemäß (3.3), (3.4) und der Homogenität von $\Lambda_d([\cdot])$

$$\begin{aligned} 1 - T_{tY(t)}(C) &= 1 - T_{Y(t)}(t^{-1}C) \\ &= e^{-t\Lambda_d([\text{conv } t^{-1}C])} + t \sum_{Z_1, Z_2} \Lambda_d([t^{-1}Z_1 | t^{-1}Z_2]) \\ &\quad \times \int_0^1 e^{-t\Lambda_d([\text{conv } t^{-1}C])s} (1 - T_{Y(t(1-s))}(t^{-1}Z_1))(1 - T_{Y(t(1-s))}(t^{-1}Z_2)) \, ds \\ &= e^{-\Lambda_d([\text{conv } C])} + \sum_{Z_1, Z_2} \Lambda_d([Z_1 | Z_2]) \\ &\quad \times \int_0^1 e^{-\Lambda_d([\text{conv } C])s} (1 - T_{Y(1-s)}(Z_1))(1 - T_{Y(1-s)}(Z_2)) \, ds \\ &= 1 - T_{Y(1)}(C). \end{aligned}$$

Dies liefert mit Satz 2.11 die Behauptung. □

Aus Lemma 3.4 lässt sich für $K_R := R \cdot K$ mit $R > 0$ die Eigenschaft

$$Y_{K_R}(t) \stackrel{D}{=} Y(t) \cap K_R = R(R^{-1}Y(t) \cap K) \stackrel{D}{=} R(Y(tR) \cap K) \stackrel{D}{=} RY_K(tR), \quad t > 0, \quad (3.5)$$

für alle lokalen STIT Mosaiken $Y_{K_R}(t)$ gewinnen.

Zudem können wir mithilfe des Kapazitätsfunktional zeigen, dass $Y(t)$ für $d = 1$ ein homogener Poissonscher Punktprozess in \mathbb{R} mit konstanter Intensität $t > 0$ ist.

Lemma 3.5. Für $d = 1$ bildet $Y(t)$ einen homogenen Poissonschen Punktprozess in \mathbb{R} mit konstanter Intensität $t > 0$.

Beweis. Nach [63, Theorem 3.6.3] reicht es, die Gleichheit

$$T_{Y(t)}(C) = 1 - e^{-t\Lambda_1([C])} = 1 - e^{-t\ell_1(C)}, \quad C \in \mathcal{C}^d, \quad (3.6)$$

zu zeigen. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $C = \bigcup_{i=1}^k C_i \in \mathcal{C}_0^1$, $k \in \mathbb{N}$, eine endliche Vereinigung von disjunkten Intervallen ist. Für $k = 1$ ist (3.6) wegen (3.2) erfüllt. Für $k \geq 2$ erhalten wir mit (3.3)

$$\begin{aligned} 1 - T_{Y(t)}(C) &= e^{-t\Lambda_1([\text{conv } C])} + t \sum_{Z_1, Z_2} \Lambda_1([Z_1|Z_2]) \\ &\quad \times \int_0^1 e^{-t\Lambda_1([\text{conv } C])s} (1 - T_{Y(t(1-s))}(Z_1))(1 - T_{Y(t(1-s))}(Z_2)) \, ds. \end{aligned}$$

Induktiv ergibt sich zum einen

$$(1 - T_{Y(t(1-s))}(Z_1))(1 - T_{Y(t(1-s))}(Z_2)) = e^{-t(1-s)\ell_1(Z_1)} e^{-t(1-s)\ell_1(Z_2)} = e^{-t(1-s)\ell_1(C)}$$

und zum anderen $\Lambda_1([Z_1|Z_2]) = 0$, falls $\text{conv } Z_1 \cap \text{conv } Z_2 \neq \emptyset$ gilt. Schreiben wir $C_{i,i+1}$ für das Intervall, das zwischen C_i und C_{i+1} für $i \in \{1, \dots, k-1\}$ liegt, so gilt dann

$$\sum_{Z_1, Z_2} \Lambda_1([Z_1|Z_2]) = \sum_{i=1}^{k-1} \Lambda_1([C_{i,i+1}]) = \sum_{i=1}^{k-1} \ell_1(C_{i,i+1}) = \ell_1(\text{conv } C) - \ell_1(C).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 - T_{Y(t)}(C) &= e^{-t\ell_1(\text{conv } C)} + t(\ell_1(\text{conv } C) - \ell_1(C)) \int_0^1 e^{-t\ell_1(\text{conv } C)s} e^{-t(1-s)\ell_1(C)} \, ds \\ &= e^{-t\ell_1(\text{conv } C)} + e^{-t\ell_1(C)} \int_0^1 t(\ell_1(\text{conv } C) - \ell_1(C)) e^{-t(\ell_1(\text{conv } C) - \ell_1(C))s} \, ds \\ &= e^{-t\ell_1(\text{conv } C)} + e^{-t\ell_1(C)} (1 - e^{-t(\ell_1(\text{conv } C) - \ell_1(C))}) \\ &= e^{-t\ell_1(C)} \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. □

3.2 Mischungseigenschaft von globalen STIT Mosaike

Der Begriff der Mischungseigenschaft muss zunächst für zufällige abgeschlossene Mengen erklärt werden. Es sei dazu \mathcal{Z} eine stationäre, zufällige abgeschlossene Menge mit induziertem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{F}^d, \mathcal{B}(\mathcal{F}^d), \mathbb{P}_{\mathcal{Z}})$. Fortan beschreibt $T_x F := F \oplus \{x\}$ die Verschiebung der Menge $F \in \mathcal{F}^d$ durch den Vektor $x \in \mathbb{Z}^d$, und $\mathcal{T} := \{T_x : x \in \mathbb{Z}^d\}$ bezeichnet das Mengensystem dieser Translationen. Somit gewährleistet die Stationarität der zufälligen abgeschlossenen Menge \mathcal{Z} , dass das Maß \mathbb{P} invariant unter \mathcal{T} ist, d.h., dass

$$\mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(T_x F) = \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(T_{-x} F) = \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(F) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Z}^d \text{ und für alle } F \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d) \quad (3.7)$$

gilt. Dann wird das Quadrupel $(\mathcal{F}^d, \mathcal{B}(\mathcal{F}^d), \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{T})$ ein dynamisches System genannt.

Definition 3.6. *Das dynamische System $(\mathcal{F}^d, \mathcal{B}(\mathcal{F}^d), \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{T})$ einer zufälligen abgeschlossenen Menge \mathcal{Z} ist mischend (oder erfüllt die Mischungseigenschaft), falls*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(F_1 \cap T_x F_2) = \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(F_1) \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(F_2) \quad \text{für alle } F_1, F_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d) \quad (3.8)$$

gilt.

Vereinfacht wird dann \mathcal{Z} auch mischend genannt bzw. man sagt, dass \mathcal{Z} die Mischungseigenschaft erfüllt.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{T} \subset \mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$ die σ -Algebra von allen unter \mathcal{T} invarianten Mengen, d.h.

$$\mathbb{T} = \{F \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d) : T_x F = F \text{ für alle } x \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass aus der Mischungseigenschaft eines dynamischen Systems

$$\mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(F) = \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(F \cap T_x F) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(F) \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}(F), \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

für alle $F \in \mathbb{T}$ folgt. Dies impliziert unmittelbar $\mathbb{P}(F) \in \{0, 1\}$, d.h., das dynamische System ist sogar ergodisch.

Nach Satz 2.11 ist bekannt, dass die Verteilung einer zufälligen abgeschlossenen Menge eindeutig durch ihr Kapazitätsfunktional charakterisiert ist. Deshalb sollte es möglich sein, die Mischungseigenschaft mithilfe des Kapazitätsfunktionals nachzuprüfen. In der Tat lässt sich die Verifizierung der Mischungseigenschaft auf Eigenschaften des Kapazitätsfunktionals reduzieren.

Lemma 3.7 ([63, Theorem 9.3.2]). *Eine zufällige abgeschlossene Menge \mathcal{Z} ist genau dann mischend, falls*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} (1 - T_{\mathcal{Z}}(C_1 \cup T_x C_2)) = (1 - T_{\mathcal{Z}}(C_1))(1 - T_{\mathcal{Z}}(C_2)) \quad (3.9)$$

für alle $C_1, C_2 \in \mathcal{C}^d$ gilt. □

Wir möchten nun die Mischungseigenschaft für globale STIT Mosaike nachweisen. Dazu sei nun $\mathcal{Z} = Y(t)$ für $t > 0$. Nach dem letzten Lemma muss lediglich das Kapazitätsfunktional auf die Bedingung (3.9) geprüft werden. Dafür müssen wir auf die Formel (3.3) zurückgreifen, die das Kapazitätsfunktional für kompakte Mengen C mit mindestens zwei Zusammenhangskomponenten bestimmt. Für beliebige $C \in \mathcal{C}^d$ bemerken wir, dass C aufgrund der Kompaktheit nur abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen kann. Bei Blick auf die Formel (3.3) liegt es nahe, dass die Masse der konvexen Hülle von

$$C(x) = C_1 \cup T_x C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C}_0^d, x \in \mathbb{Z}^d,$$

bzgl. des Maßes $\Lambda_d([\cdot])$ für $\|x\| \rightarrow \infty$ zu untersuchen ist. Wir werden nämlich später sehen, dass sie für die Mischungseigenschaft essentiell ist.

Lemma 3.8. *Es sei $C_i \in \mathcal{C}_0^d$ mit $\Lambda_d([C_i]) > 0$ für $i \in \{1, 2\}$ gegeben. Für hinreichend großes $\|x\|$ gilt*

$$c_1 \|x\| \leq \Lambda_d([\text{conv } C(x)]) \leq c_2 \|x\|$$

mit gewissen Konstanten $c_1, c_2 > 0$.

Beweis. Für die Angabe der oberen Schranke bemerken wir zunächst, dass

$$\sup_{z_1 \in C_1, z_2 \in T_x C_2} d(z_1, z_2) = \sup_{z_1 \in C_1, z_2 \in C_2} d(z_1, z_2 - x) \leq \sup_{z_1 \in C_1, z_2 \in C_2} d(z_1, z_2) + \|x\| = c_0 + \|x\|$$

für eine endliche Konstante $c_0 := \sup_{z_1 \in C_1, z_2 \in C_2} d(z_1, z_2)$ gilt. Dann wählen wir $\|x\| \geq 1$, definieren $r(x) := (c_0 + 1)\|x\|$ und erhalten schließlich für alle $\|x\| \geq 1$

$$\sup_{z_1 \in C_1, z_2 \in T_x C_2} d(z_1, z_2) \leq r(x).$$

Es sei nun $B(x)$ eine Kugel mit Radius $r(x)$, die $\text{conv } C(x)$ enthält. Im Hinblick auf (2.7) bekommen wir

$$\begin{aligned} \Lambda_d([B(x)]) &= \int_{\mathcal{H}_0^d} \int_{H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{(H_0 \oplus \{z\}) \cap B(x) \neq \emptyset\}} d\ell_{H_0^\perp}(z) d\Lambda_d^0(H_0) \\ &= 2r(x) \int_{\mathcal{H}_0^d} d\Lambda_d^0(H_0) = 2r(x) =: c_2 \|x\| \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit einer Konstante $c_2 := 2(c_0 + 1) \in (0, \infty)$, so dass $\Lambda_d([\text{conv } C(x)]) \leq c_2 \|x\|$ für $\|x\| \geq 1$ gilt.

Um die untere Schranke zu erhalten, wählen wir zwei beliebige, aber unterschiedliche Punkte $z_1 \in C_1$ und $z_2 \in T_x C_2$ und bezeichnen mit $\overline{z_1 z_2}$ die Strecke von z_1 nach z_2 . Somit gilt offensichtlich $\Lambda_d([\text{conv } C(x)]) \geq \Lambda_d([\overline{z_1 z_2}])$. Wir wählen $\|x\|$ hinreichend groß, so dass $\|z_1 - z_2\| \geq \frac{\|x\|}{2}$ gefordert werden kann. Um $\Lambda_d([\overline{z_1 z_2}])$ nach unten zu beschränken, verwenden

wir wieder (2.7) und die Tatsache, dass der Träger von Λ_d^0 mindestens d Hyperebenen mit linear unabhängigen Normalenvektoren enthält. Dies gewährleistet die Existenz einer Konstanten $c_1 \in (0, \infty)$, so dass

$$\begin{aligned} \Lambda_d([\overline{z_1 z_2}]) &= \int_{\mathcal{H}_0^d} \int_{H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{(H_0 \oplus \{z\}) \cap \overline{z_1 z_2} \neq \emptyset\}} d\ell_{H_0^\perp}(z) d\Lambda_d^0(H_0) = \int_{\mathcal{H}_0^d} V_1(\overline{z_1 z_2} | H_0^\perp) d\Lambda_d^0(H_0) \\ &\geq \frac{\|x\|}{2} \int_{\mathcal{H}_0^d} |\cos \angle(\overline{z_1 z_2}, H_0^\perp)| d\Lambda_d^0(H_0) =: c_1 \|x\| \end{aligned}$$

gilt. Dabei ist $\overline{z_1 z_2} | H_0^\perp$ die orthogonale Projektion von $\overline{z_1 z_2}$ auf H_0^\perp , und $\angle(\overline{z_1 z_2}, H_0^\perp)$ bezeichnet den Winkel zwischen H_0^\perp und der Geraden, die durch die Punkte z_1 und z_2 verläuft. Daher gilt $\Lambda_d([\text{conv } C(x)]) \geq c_1 \|x\|$ und die Behauptung folgt. \square

Nachdem das asymptotische Verhalten von $\Lambda_d([\text{conv } C(x)])$ gerade untersucht worden ist, wird das nachfolgende Lemma die Bedingung (3.9) für kompakte Mengen C_1 und C_2 mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten verifizieren. Zusätzlich kann daraus eine Konvergenzgeschwindigkeit gewonnen werden. Für $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathcal{O}(g)$ eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{g(y)} \in \mathbb{R}$.

Lemma 3.9. *Für $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_0^d$ gilt*

$$|1 - T_{Y(t)}(C_1 \cup T_x C_2) - (1 - T_{Y(t)}(C_1))(1 - T_{Y(t)}(C_2))| = \mathcal{O}(\|x\|^{-1}), \quad (3.11)$$

falls $\|x\| \rightarrow \infty$.

Beweis. Ohne Weiteres können wir annehmen, dass $\Lambda_d([C_1]), \Lambda_d([C_2]) > 0$ gelten. Ansonsten folgt die Eigenschaft (3.11) sofort.

Weiterhin schreiben wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $C_1 = \bigcup_{k=1}^n C_{1,k} \in \mathcal{C}_0^d$ und $C_2 = \bigcup_{\ell=1}^m C_{2,\ell} \in \mathcal{C}_0^d$ für $m, n \in \mathbb{N}$, wobei $C_{1,k}$ und $C_{2,\ell}$ für alle k, ℓ zusammenhängend sind. Gemäß Lemma 3.8 und

$$\Lambda_d([\text{conv } C(x)]) = \Lambda_d([C_1]) + \Lambda_d([C_2]) + \Lambda_d([C_1 | T_x C_2]) - \Lambda_d([C_1] \cap [T_x C_2]) \quad (3.12)$$

erhält man auch für hinreichend großes $\|x\|$

$$c'_1 \|x\| \leq \Lambda_d([C_1 | T_x C_2]) \leq c'_2 \|x\|$$

mit Konstanten $c'_1, c'_2 > 0$. Weiterhin besagt (3.3), dass für alle $x \in \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} 1 - T_{Y(t)}(C(x)) &= e^{-t\Lambda_d([\text{conv } C(x)])} + t \sum_{Z_1, Z_2} \Lambda_d([Z_1 | Z_2]) \\ &\quad \times \int_0^1 e^{-t\Lambda_d([\text{conv } C(x)]s)} (1 - T_{Y(t(1-s))}(Z_1))(1 - T_{Y(t(1-s))}(Z_2)) ds \end{aligned}$$

gilt. Es ist hierbei zu beachten, dass Z_1 und Z_2 ebenfalls von x abhängig sind. Ohne Einschränkung sei $C_1 \cap T_x C_2 = \emptyset$ gegeben. Im Folgenden ist es zu zeigen, dass alle Summanden bis auf den Summanden $Z_1 = C_1$ und $Z_2 = T_x C_2$ für $\|x\| \rightarrow \infty$ asymptotisch zu vernachlässigen sind. Dafür sind im Wesentlichen drei Fälle zu untersuchen. Für den Fall, dass $Z_1 \cap C_1 \neq \emptyset$, $Z_1 \cap T_x C_2 \neq \emptyset$, $Z_2 \cap C_1 \neq \emptyset$ und $Z_2 \cap T_x C_2 \neq \emptyset$ gilt, ergibt sich unmittelbar $\Lambda_d([Z_1|Z_2]) = \mathcal{O}(1)$ für $\|x\| \rightarrow \infty$. Falls $Z_1 \cap C_1 \neq \emptyset$, $Z_1 \cap T_x C_2 \neq \emptyset$ und $Z_2 \cap C_1 = \emptyset$ gilt, können $\ell_1, \ell_2 \in \{1, \dots, m\}$ mit $\ell_1 \neq \ell_2$ so gewählt werden, dass

$$Z_1 \cap T_x C_{2,\ell_1} = \emptyset, \quad Z_2 \cap T_x C_{2,\ell_2} = \emptyset.$$

Es folgt, dass

$$\Lambda_d([Z_1|Z_2]) \leq \Lambda_d([T_x C_{2,\ell_1}|T_x C_{2,\ell_2}]) = \Lambda_d([C_{2,\ell_1}|C_{2,\ell_2}]) = \mathcal{O}(1), \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

Der letzte zu betrachtende Fall $Z_1 \cap C_1 \neq \emptyset$, $Z_1 \cap T_x C_2 \neq \emptyset$ und $Z_2 \cap T_x C_2 = \emptyset$ funktioniert ähnlich. Demnach existieren unterschiedliche $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$Z_1 \cap C_{1,k_1} = \emptyset, \quad Z_2 \cap C_{1,k_2} = \emptyset.$$

Dies führt uns ebenso zu

$$\Lambda_d([Z_1|Z_2]) \leq \Lambda_d([C_{1,k_1}|C_{1,k_2}]) = \mathcal{O}(1), \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

Aus Symmetriegründen ist $\Lambda_d([Z_1|Z_2]) = \mathcal{O}(1)$ für alle Z_1, Z_2 mit $Z_1 \neq C_1$ für $\|x\| \rightarrow \infty$ gezeigt. Somit erhalten wir für diese Fälle unter Berücksichtigung von Lemma 3.8

$$\begin{aligned} & t\Lambda_d([Z_1|Z_2]) \int_0^1 e^{-t\Lambda_d([\text{conv } C(x)])s} (1 - T_{Y(t(1-s))}(Z_1))(1 - T_{Y(t(1-s))}(Z_2)) \, ds \\ & \leq t\Lambda_d([Z_1|Z_2]) \int_0^1 e^{-t\Lambda_d([\text{conv } C(x)])s} \, ds = t\Lambda_d([Z_1|Z_2]) \frac{1 - e^{-t\Lambda_d([\text{conv } C(x)])}}{t\Lambda_d([\text{conv } C(x)])} \\ & = \mathcal{O}(\|x\|^{-1}), \quad \|x\| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Deswegen bleibt nur noch der Fall $Z_1 = C_1$ und $Z_2 = T_x C_2$ zu untersuchen. Da $T_{Y(\cdot)}(C)$ nach den oben gezeigten Formeln (3.2) und (3.3) offensichtlich für alle $C = \bigcup_{j=1}^p C_j \in \mathcal{C}_0^d$ mit $p \geq 1$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{s \in (0,1)} \frac{\partial(1 - T_{Y(t(1-\cdot))}(C))}{\partial s}(s) \leq M_p < \infty$$

ist, liefert die partielle Integration

$$\begin{aligned}
& t\Lambda_d([C_1|T_x C_2]) \int_0^1 e^{-t\Lambda_d([\text{conv } C(x)])s} (1 - T_{Y(t(1-s))}(C_1))(1 - T_{Y(t(1-s))}(T_x C_2)) \, ds \\
&= \frac{\Lambda_d([C_1|T_x C_2])}{\Lambda_d([\text{conv } C(x)])} \left[-e^{-t\Lambda_d([\text{conv } C(x)])s} (1 - T_{Y(t(1-s))}(C_1))(1 - T_{Y(t(1-s))}(C_2)) \right]_0^1 \\
&\quad + \frac{\Lambda_d([C_1|T_x C_2])}{\Lambda_d([\text{conv } C(x)])} \int_0^1 e^{-t\Lambda_d([\text{conv } C(x)])s} \frac{\partial((1 - T_{Y(t(1-s))}(C_1))(1 - T_{Y(t(1-s))}(C_2)))}{\partial s} (s) \, ds \\
&= \frac{\Lambda_d([C_1|T_x C_2])}{\Lambda_d([\text{conv } C(x)])} \left((1 - T_{Y(t)}(C_1))(1 - T_{Y(t)}(C_2)) + \mathcal{O}(\|x\|^{-1}) \right), \tag{3.14}
\end{aligned}$$

falls $\|x\| \rightarrow \infty$. Wegen (3.12) erhalten wir

$$\frac{\Lambda_d([C_1|T_x C_2])}{\Lambda_d([\text{conv } C(x)])} \rightarrow 1, \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

und schließen daraus, dass (3.14) die Gleichheit

$$(1 - T_{Y(t)}(C_1))(1 - T_{Y(t)}(C_2)) + \mathcal{O}(\|x\|^{-1}), \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

erfüllt. Zusammen mit (3.13) folgt die Behauptung. \square

Satz 3.10. *Jedes globale STIT Mosaik $Y(t)$ ist für $t > 0$ mischend.*

Beweis. Nach Lemma 3.9 muss nur noch der Fall untersucht werden, wenn $C(x) \in \mathcal{C}^d$ aus abzählbar unendlich vielen Zusammenhangskomponenten besteht. Für $C_1, C_2 \in \mathcal{C}^d$ schreiben wir $C_1 = \bigcup_{i=1}^{N_1} C_{1,i}$ und $C_2 = \bigcup_{i=1}^{N_2} C_{2,i}$, wobei $C_{1,i}$ und $C_{2,i}$ zusammenhängend sind und entweder $N_1 = \infty$ oder $N_2 = \infty$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $N_1 = N_2 = \infty$ vorliegt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{Z}^d$ erhält man

$$\begin{aligned}
C_1 \cup T_x C_2 &\supset \bigcup_{i=1}^n C_{1,i} \cup T_x C_{2,i} =: C'_n(x), \\
C_1 \cup T_x C_2 &\subset \bigcup_{i=1}^n C_{1,i} \cup T_x C_{2,i} \cup \text{conv} \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_{1,i} \cup T_x C_{2,i} \right) =: C''_n(x).
\end{aligned}$$

Wir erhalten mit Lemma 3.9

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y(t) \cap C'_n(x) = \emptyset) = \mathbb{P}(Y(t) \cap \bigcup_{i=1}^n C_{1,i} = \emptyset) \mathbb{P}(Y(t) \cap \bigcup_{i=1}^n C_{2,i} = \emptyset) \tag{3.15}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y(t) \cap C_n''(x) = \emptyset) &= \mathbb{P}(Y(t) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n C_{1,i} \cup \text{conv} \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_{1,i} \right) \right) = \emptyset) \\ &\quad \times \mathbb{P}(Y(t) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n C_{2,i} \cup \text{conv} \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_{2,i} \right) \right) = \emptyset) \end{aligned} \quad (3.16)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenden wir den Satz von der monotonen Konvergenz auf (3.15) und (3.16) an, so führt dies zu

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y(t) \cap (C_1 \cup T_x C_2) = \emptyset) = \mathbb{P}(Y(t) \cap C_1 = \emptyset) \mathbb{P}(Y(t) \cap C_2 = \emptyset).$$

Somit haben wir die Eigenschaft (3.9) für alle $C \in \mathcal{C}^d$ sichergestellt, und $Y(t)$ ist für alle $t > 0$ mischend. \square

Die Mischungseigenschaft von globalen STIT Mosaike wurde schon in [36] mit (3.8) nachgewiesen. Eine Anwendung der Mischungseigenschaft bzw. der Ergodizität von globalen STIT Mosaike ist z.B. in [67] gegeben.

3.3 Varianz der Gesamtoberfläche von lokalen STIT Mosaike

Für den Rest des Kapitels wird die Bedingung $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ mit $d \geq 2$ vorausgesetzt. Wir betrachten nun die Gesamtoberfläche (Gesamtkantenlänge im ebenen Fall) eines lokalen STIT Mosaiks $Y_K(t)$ für $t > 0$, welche durch

$$V_{d-1}(Y_K(t)) = \sum_{f \in \text{MP}_{d-1}(Y_K(t))} V_{d-1}(f)$$

gegeben ist. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass sich die ersten beiden Momente von $V_{d-1}(Y_K(t))$ explizit aus dem Kapazitätsfunktional ableiten lassen. Da jede Realisierung von $Y_K(t)$ insbesondere polykonvex ist, können wir auf $Y_K(t)$ die verallgemeinerte Steiner-Formel für polykonvexe Mengen aus Lemma 2.9 anwenden. Eine Veranschaulichung dazu liefert die Abbildung 3.1. Mit Lemma 2.9 erhalten wir für jede Realisierung von $Y_K(t)$

$$V_d(Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) = \sum_{j=0}^d \varepsilon^{d-j} \kappa_{d-j} V_j(Y_K(t)), \quad \varepsilon \geq 0. \quad (3.17)$$

Die Steiner-Formel in (3.17) impliziert, dass die Gesamtoberfläche von $Y_K(t)$ unter Beachtung von $V_d(Y_K(t)) = 0$ aus

$$V_{d-1}(Y_K(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2\varepsilon} V_d(Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))$$

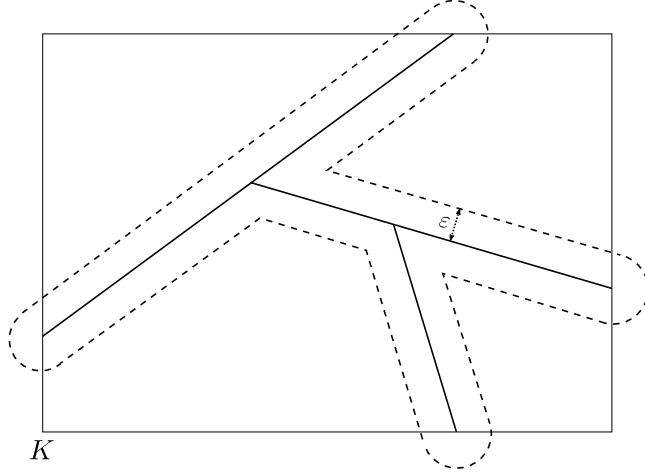


Abbildung 3.1: Die Minkowski-Summe $Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ für ein Rechteck K .

hergeleitet werden kann. Ebenso können ihre Momente durch

$$\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^k] = \mathbb{E}\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\varepsilon)^k} V_d(Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))^k\right], \quad k \in \mathbb{N},$$

dargestellt werden. Mit $\text{diam } A$ bezeichnen wir den Durchmesser einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$.

Lemma 3.11. *Für $t > 0$ existiert jedes Moment $\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^k]$, $k \in \mathbb{N}$, mit*

$$\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^k] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\varepsilon)^k} \mathbb{E}[V_d(Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))^k].$$

Beweis. Der Satz von der majorisierten Konvergenz ergibt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2\varepsilon} V_{d-1}(Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))\right)^k\right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E}\left[\left(V_{d-1}(Y_K(t)) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{d-2} \varepsilon^{d-j-1} \kappa_{d-j} V_j(Y_K(t))\right)^k\right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E}\left[V_{d-1}(Y_K(t))^k + \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} V_{d-1}(Y_K(t))^\ell \left(\frac{1}{2}\right)^{k-\ell} \left(\sum_{j=0}^{d-2} \varepsilon^{d-j-1} \kappa_{d-j} V_j(Y_K(t))\right)^{k-\ell}\right] \\ &= \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^k], \end{aligned}$$

da

$$|V_j(Y_K(t))|^n \leq \Sigma_{V_0}(Y_K(t))^n (\text{diam } K)^{j \cdot n}$$

für alle $j \in \{0, \dots, d-1\}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und da nach Satz 5.1 und Bemerkung 5.2 jedes Moment von $\Sigma_{V_0}(Y_K(t))$ existiert. Dabei beschreibt $\Sigma_{V_0}(Y_K(t))$ die Anzahl der maximalen Polytope der Dimension $d-1$ von $Y_K(t)$. Damit gilt

$$\mathbb{E}\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2\varepsilon} V_{d-1}(Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))\right)^k\right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\varepsilon)^k} \mathbb{E}[V_d(Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))^k]$$

und die Behauptung folgt. \square

Als Nächstes werden wir unter Verwendung des Kapazitätsfunktionals den Erwartungswert der Gesamtoberfläche von $Y_K(t)$ bestimmen.

Satz 3.12. *Der Erwartungswert der Gesamtoberfläche von $Y_K(t)$ ist für alle $t > 0$ und $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ durch*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_K 1 - T_{Y_K(t)}(B_\varepsilon^d(x) \cap K) \, dx \\ &= t V_d(K) \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis. Nach dem Satz von Fubini und Lemma 3.11 bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{E}[V_d(Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})}(x) \, dx\right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(x \in Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) \, dx. \end{aligned}$$

Da aber die Ereignisse $\{x \in Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})\}$ und $\{Y_K(t) \cap B_\varepsilon^d(x) \neq \emptyset\}$ identisch sind, ergibt sich somit

$$\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{P}(Y_K(t) \cap B_\varepsilon^d(x) \neq \emptyset) \, dx.$$

Dies kann mithilfe von Lemma 3.1 und der Homogenität von $\Lambda_d([\cdot])$ vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} T_{Y_K(t)}(B_\varepsilon^d(x) \cap K) \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} 1 - e^{-t\Lambda_d([B_\varepsilon^d(x) \cap K])} \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} 1 - e^{-t\varepsilon\Lambda_d([B_1^d(x) \cap \frac{1}{\varepsilon}K])} \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})}(x) \frac{1 - e^{-t\varepsilon\Lambda_d([B_1^d(x) \cap \frac{1}{\varepsilon}K])}}{2\varepsilon} \, dx. \end{aligned}$$

Wegen der Abschätzung

$$1 - e^z \leq z, \quad z > 0,$$

ist $f(x) = \mathbb{1}_{K \oplus B_1^d(\mathbf{0})}(x) t \Lambda_d([B_1^d])$ für $\varepsilon \in (0, 1]$ eine geeignete Majorante und folglich liefern der Satz von der majorisierten Konvergenz und die Taylorentwicklung der Exponentialfunktion in $z = 0$

$$\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))] = \int_K \frac{t \Lambda_d([B_1^d])}{2} dx = \frac{t \Lambda_d([B_1^d]) V_d(K)}{2}.$$

Der Rest folgt aus der Tatsache, dass

$$\begin{aligned} \Lambda_d([B_1^d]) &= \int_{\mathcal{H}_0^d} \int_{H_0^\perp} \mathbb{1}_{\{(H_0 \oplus \{x\}) \cap B_1^d \neq \emptyset\}} d\ell_{H_0^\perp}(x) d\Lambda_d^0(H_0) \\ &= 2 \int_{\mathcal{H}_0^d} d\Lambda_d^0(H_0) = 2 \end{aligned}$$

gilt. □

Bemerkung 3.13. Für $\Lambda_d = \Lambda_d^{iso}$ bietet die Crofton-Formel einen alternativen Beweis zu Satz 3.12. Das iterative Anwenden der Crofton-Formel unter Beachtung des Satzes von Fubini ergibt nämlich, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))] &= \frac{1}{\gamma_{d,d-2}} \int_{[K]} \mathbb{E}[V_{d-2}(Y_K(t) \cap H_d)] d\Lambda_d^{iso}(H_d) \\ &= \prod_{k=2}^d \frac{1}{\gamma_{k,k-2}} \int_{[K]} \dots \int_{[K \cap H_d \cap \dots \cap H_3]} \mathbb{E}[V_0(Y_K(t) \cap H_d \cap \dots \cap H_2)] \\ &\quad \times d\Lambda_2^{iso}(H_2) \dots d\Lambda_d^{iso}(H_d). \end{aligned}$$

Für j -dimensionale, affine Unterräume E_j , $j \in \{1, \dots, d-1\}$, gilt nach (2.10)

$$Y(t) \cap E_j \stackrel{D}{=} Y(t\tilde{\gamma}_{d,j}, E_j)$$

mit

$$\tilde{\gamma}_{d,j} = \frac{j\kappa_j}{(j+1)\kappa_{j+1}} \frac{(d+1)\kappa_{d+1}}{d\kappa_d}.$$

Offensichtlich ist $K \cap \bigcap_{k=2}^{d-1} H_k$ fast sicher ein Intervall und nach Lemma 3.5 ist $V_0(Y_K(t) \cap H_d \cap \dots \cap H_2)$ Poisson-verteilt mit Parameter

$$t \cdot \prod_{j=2}^d \tilde{\gamma}_{j,j-1} V_1(K \cap \bigcap_{k=2}^{d-1} H_k).$$

Wir benutzen wiederum die Crofton-Formel und erhalten

$$\begin{aligned}
& t \prod_{j=2}^d \frac{\tilde{\gamma}_{j,j-1}}{\gamma_{j,j-2}} \int_{[K]} \dots \int_{[K \cap H_d \cap \dots \cap H_3]} V_1 \left(K \cap \bigcap_{k=2}^{d-1} H_k \right) d\Lambda_2^{iso}(H_2) \cdots d\Lambda_d^{iso}(H_d) \\
& = t \prod_{j=2}^d \frac{(j-1)\kappa_{j-1}}{j\kappa_j} \frac{(j+1)\kappa_{j+1}}{j\kappa_j} \frac{\binom{j}{j-1}\kappa_j\kappa_{j-2}}{\binom{j-1}{j-2}\kappa_{j-1}\kappa_{j-1}} \int_{[K]} V_{d-1}(K \cap H_d) d\Lambda_d^{iso}(H) \\
& = t V_d(K) \prod_{j=2}^d \frac{j+1}{j} \frac{\kappa_{j-2}\kappa_{j+1}}{\kappa_{j-1}\kappa_j}.
\end{aligned}$$

Dann impliziert die Gammafunktion Γ mit (2.1)

$$\prod_{j=2}^d \frac{j+1}{j} \frac{\kappa_{j-2}\kappa_{j+1}}{\kappa_{j-1}\kappa_j} = \frac{d+1}{2} \frac{\kappa_0}{\kappa_{d-1}} \frac{\kappa_{d+1}}{\kappa_2} = \frac{d+1}{2\pi} \frac{\pi^{\frac{d+1}{2}} \Gamma(\frac{d+1}{2} + 1)^{-1}}{\pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(\frac{d-1}{2} + 1)^{-1}} = \frac{\frac{d+1}{2} \Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + 1)} = 1.$$

Für den Rest des Kapitels werden wir uns ausschließlich mit dem zweiten Moment bzw. mit der Varianz der Gesamtoberfläche eines lokalen STIT Mosaiks $Y_K(t)$ für $t > 0$ und $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ beschäftigen. Wir werden zunächst die Hauptaussage vorstellen, wobei ein Beweis erst am Ende des Abschnittes geliefert werden kann.

Satz 3.14. *Für die Gesamtoberfläche von $Y_K(t)$ ergibt sich für alle $t > 0$ und $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^2] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} 1 - 2(1 - T_{Y_K(t)}(B_\varepsilon^d(x) \cap K)) \\
&\quad + 1 - T_{Y_K(t)}((B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K) dx dy. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Falls $\Lambda_d = \Lambda_d^{iso}$, dann gilt sogar

$$\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^2] = t^2 V_d(K)^2 + \frac{d-1}{2} \int_K \int_K \frac{1 - e^{-t\gamma_{d,0}\|x-y\|}}{\|x-y\|^2} dx dy \tag{3.19}$$

mit

$$\gamma_{d,0} = \frac{2\kappa_{d-1}}{d\kappa_d}.$$

Eine direkte Folgerung kombiniert mit Satz 3.12 führt uns zu der Varianz der Gesamtoberfläche von $Y_K(t)$. Dabei bemerken wir, dass diese Varianz schon in [65, Theorem 5.1] mit anderen Techniken gezeigt wurde.

Korollar 3.15. *Für $\Lambda_d = \Lambda_d^{iso}$ ist die Varianz der Gesamtoberfläche von $Y_K(t)$ gegeben durch*

$$\text{Var}(V_{d-1}(Y_K(t))) = \frac{d-1}{2} \int_K \int_K \frac{1 - e^{-t\gamma_{d,0}\|x-y\|}}{\|x-y\|^2} dx dy.$$

Wir werden in kleinen Schritten den Satz 3.14 beweisen. Unter Beachtung von Lemma 3.11 und Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^2] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \mathbb{E} \left[\left(\int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})}(s) \, ds \right)^2 \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \mathbb{E} \left[\int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})}(x) \mathbb{1}_{Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})}(y) \, dx \, dy \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{P}(x \in Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}), y \in Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz 3.14 lässt sich Letzteres vereinfachen zu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{P}(Y_K(t) \cap B_\varepsilon^d(x) \neq \emptyset, Y_K(t) \cap B_\varepsilon^d(y) \neq \emptyset) \, dx \, dy.$$

Zur Erinnerung erfüllt jeder Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ die Bedingung

$$\mathbb{P}'(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}'(A^c \cup B^c) = 1 - (\mathbb{P}'(A^c) + \mathbb{P}'(B^c) - \mathbb{P}'(A^c \cap B^c))$$

für alle $A, B \in \mathcal{A}'$, wobei $A^c = \Omega' \setminus A$ für das Komplement von A steht. Mit $A = \{Y_K(t) \cap B_\varepsilon^d(x) \neq \emptyset\}$ und $B = \{Y_K(t) \cap B_\varepsilon^d(y) \neq \emptyset\}$ folgt gerade (3.18).

Es sei von nun an $\Lambda_d = \Lambda_d^{iso}$. Um (3.19) aus (3.18) zu erhalten, müssen wir den Integranden

$$1 - T_{Y_K(t)}((B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K), \quad x, y \in K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}),$$

untersuchen. Vielmehr müssen wir prüfen, ob die Menge

$$(B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K, \quad x, y \in K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}),$$

aus einer oder zwei Zusammenhangskomponenten besteht. Dann ist entweder die Formel (3.2) bei genau einer Zusammenhangskomponente oder die Formel (3.3) im anderen Fall anzuwenden. Die Menge $(B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $B_\varepsilon^d(x) \cap B_\varepsilon^d(y) \neq \emptyset$. Und Letzteres ist genau dann erfüllt, wenn $\|x - y\| \leq 2\varepsilon$ gilt. Für $\|x - y\| > 2\varepsilon$ ist $(B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K$ nicht zusammenhängend. Deshalb zerlegen wir (3.18) in

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| \leq 2\varepsilon\}} h(x, y) \, dx \, dy \tag{3.20}$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| > 2\varepsilon\}} h(x, y) \, dx \, dy \tag{3.21}$$

mit

$$h(x, y) := 1 - 2(1 - T_{Y_K(t)}(B_\varepsilon^d(x) \cap K)) + 1 - T_{Y_K(t)}((B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K).$$

Das folgende Lemma zeigt, dass das Integral in (3.20) keinen Einfluss auf (3.19) haben wird.

Lemma 3.16. *Es gilt*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| \leq 2\varepsilon\}} h(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist (3.2) anwendbar. Wir haben für alle $x, y \in K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ mit $\|x - y\| \leq 2\varepsilon$

$$h(x, y) = 1 - 2e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K])} + e^{-t\Lambda_d^{iso}([(B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K])}.$$

Wegen der Abschätzung $|1 - e^{-z}| \leq z$ für $z \geq 0$ und der Dreiecksungleichung für $|\cdot|$ erreicht man

$$|h(x, y)| \leq 2t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) + t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) + t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K]).$$

Die Homogenität von $\Lambda_d^{iso}([\cdot])$ ergibt

$$\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) = \varepsilon \Lambda_d^{iso}([B_1^d(x) \cap \frac{K}{\varepsilon}]) \leq \varepsilon \Lambda_d^{iso}([B_1^d])$$

und somit gilt

$$|h(x, y)| \leq 4t\varepsilon \Lambda_d^{iso}([B_1^d]).$$

Die dazugehörige Integration liefert

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \left| \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| \leq 2\varepsilon\}} h(x, y) \, dx \, dy \right| \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{t\Lambda_d^{iso}([B_1^d])}{\varepsilon} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| \leq 2\varepsilon\}} \, dx \, dy \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{t\Lambda_d^{iso}([B_1^d])}{\varepsilon} \int_{B_{2\varepsilon}^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \, dx \, dy \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{t\Lambda_d^{iso}([B_1^d])}{\varepsilon} (2\varepsilon)^d \kappa_d \, \text{V}_d(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) \\ & = 2^d t \Lambda_d^{iso}([B_1^d]) \kappa_d \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon^{d-1} \text{V}_d(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) = 0, \end{aligned}$$

da mittels Steiner-Formel $\text{V}_d(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})) \rightarrow \text{V}_d(K)$ für $\varepsilon \rightarrow 0+$ gilt. □

Für das Integral (3.21) benötigen wir mehr Aufwand. Es ist nun vorausgesetzt, dass $B_\varepsilon^d(x) \cap B_\varepsilon^d(y) = \emptyset$ bzw. $\|x - y\| > 2\varepsilon$ für $x, y \in K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ gilt. Dann ergibt die Formel (3.3) zur Berechnung des Kapazitätsfunktionals für kompakte Mengen mit mehreren Zusammenhangskomponenten

$$1 - T_{Y_K(t)}((B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K) = e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x,y) \cap K])} + \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K | B_\varepsilon^d(y) \cap K]) \\ \times \frac{e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K])} e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])} - e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x,y) \cap K])}}{\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x,y) \cap K]) - \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) - \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])}},$$

wobei $B_\varepsilon(x, y) := \text{conv}(B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y))$ zu setzen ist. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass der Nenner ungleich 0 ist, da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} : \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x, y) \cap K]) = \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) + \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])\} \quad (3.22)$$

eine Lebesgue-Nullmenge für alle $\varepsilon > 0$ ist. Aus (3.12) mit

$$\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x, y) \cap K]) \\ = \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) + \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K]) + \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K | B_\varepsilon^d(y) \cap K]) \\ - \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K] \cap [B_\varepsilon^d(y) \cap K])$$

schlussfolgern wir, dass

$$1 - T_{Y_K(t)}((B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K) \\ = e^{-t(\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) + \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K]))} + \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K] \cap [B_\varepsilon^d(y) \cap K]) \\ \times \frac{e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K])} e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])} - e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x,y) \cap K])}}{\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x,y) \cap K]) - \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) - \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])}}. \quad (3.23)$$

Für den weiteren Verlauf müssen wir den zweiten Summanden näher untersuchen. Es ist zu beachten, dass jede Hyperebene H durch

$$H = H(b, w) = \{h \in \mathbb{R}^d : w^T h = b\} \quad (3.24)$$

mit $b \in \mathbb{R}$ und $w \in \mathcal{S}^{d-1}$ charakterisiert ist, wobei der Exponent T für die Transposition eines Vektors bzw. einer Matrix steht. Falls H die Gleichung (3.24) erfüllt, dann erfüllt auch $H = H(-b, -w)$ diese. Bis auf eine Nullmenge erhält man deshalb

$$\Lambda_d^{iso}(\cdot) = \frac{2}{d\kappa_d} \int_{\mathcal{S}_+^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{H(b,w) \in \cdot\}} db d\sigma_{d-1}(w) \\ = \frac{1}{d\kappa_d} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{H(b,w) \in \cdot\}} db d\sigma_{d-1}(w),$$

wobei \mathcal{S}_+^{d-1} die obere Halbsphäre bezeichnet.

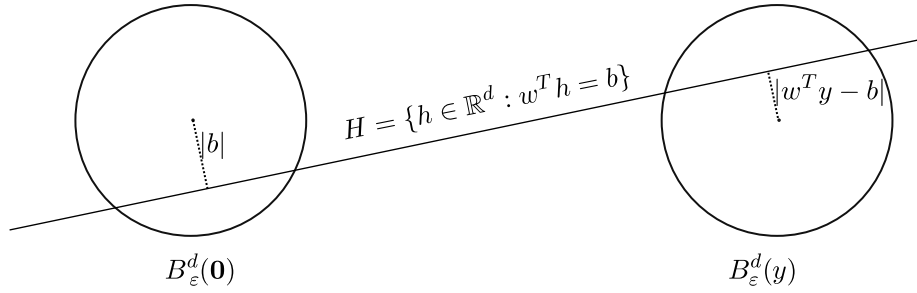


Abbildung 3.2: Die Hyperebene H schneidet die Kugeln $B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ und $B_\varepsilon^d(y)$, da der jeweilige Abstand vom Mittelpunkt zur Hyperebene kleiner als ε ist.

Lemma 3.17. Für alle $x, y \in K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ mit $\|x - y\| > 2\varepsilon$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K] \cap [B_\varepsilon^d(y) \cap K]) = \frac{(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \frac{1}{\|x - y\|}.$$

Beweis. Aufgrund der Isotropie können wir annehmen, dass $x = \mathbf{0}$ und $y = re_1$ für ein $r > 0$ gilt, wobei $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^d$ der erste Einheitsvektor ist. Die Abbildung 3.2 veranschaulicht, dass

$$\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(\mathbf{0})] \cap [B_\varepsilon^d(re_1)]) = \frac{1}{d\kappa_d} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|b| \leq \varepsilon, |w^T y - b| \leq \varepsilon\}} db d\sigma_{d-1}(w) \quad (3.25)$$

gilt. Zunächst werden wir uns mit dem inneren Integral beschäftigen. Falls $|b| \leq \varepsilon$ und $0 \leq w^T y - b \leq \varepsilon$ erhalten wir

$$\mathbb{1}_{\{-\varepsilon \leq w^T y \leq 2\varepsilon\}} \int_{\max(w^T y - \varepsilon, -\varepsilon)}^{\min(w^T y, \varepsilon)} db = \begin{cases} w^T y + \varepsilon, & \text{falls } -\varepsilon \leq w^T y \leq 0, \\ \varepsilon, & \text{falls } 0 \leq w^T y \leq \varepsilon, \\ 2\varepsilon - w^T y, & \text{falls } \varepsilon \leq w^T y \leq 2\varepsilon, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Andererseits besagt der Fall $|b| \leq \varepsilon$ und $-\varepsilon \leq w^T y - b \leq 0$, dass

$$\mathbb{1}_{\{-2\varepsilon \leq w^T y \leq \varepsilon\}} \int_{\max(w^T y, -\varepsilon)}^{\min(w^T y + \varepsilon, \varepsilon)} db = \begin{cases} 2\varepsilon + w^T y, & \text{falls } -2\varepsilon \leq w^T y \leq -\varepsilon, \\ \varepsilon, & \text{falls } -\varepsilon \leq w^T y \leq 0, \\ \varepsilon - w^T y, & \text{falls } 0 \leq w^T y \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit lässt sich (3.25) vereinfachen zu

$$\frac{1}{d\kappa_d} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \max(2\varepsilon - |w^T y|, 0) d\sigma_{d-1}(w).$$

Als Nächstes wird die Darstellung $w = \cos(\vartheta)e_1 + \sin(\vartheta)v$ für $\vartheta \in [0, \pi)$ und $v \in \mathcal{S}^{d-1} \cap e_1^T$ verwendet, wobei e_1^T der zu e_1 orthogonale, $(d-1)$ -dimensionale lineare Unterraum ist. Zudem gilt unter Berücksichtigung von (2.2)

$$\sigma_{d-2}(\sin(\vartheta)A) = \sin(\vartheta)^{d-2}\sigma_{d-2}(A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^{d-1} \cap e_1^T)$, falls man $\mathcal{S}^{d-1} \cap e_1^T$ als $(d-2)$ -dimensionale Einheitssphäre mit Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{S}^{d-1} \cap e_1^T)$ interpretiert. Mit dem Satz von Fubini folgt nun, dass (3.25) identisch ist mit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d\kappa_d} \int_0^\pi \sin(\vartheta)^{d-2} \int_{\mathcal{S}^{d-1} \cap e_1^T} \max(2\varepsilon - r|(\cos(\vartheta)e_1 + \sin(\vartheta)v)^T e_1|, 0) \, d\sigma_{d-2}(v) \, d\vartheta \\ &= \frac{2}{d\kappa_d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)^{d-2} \int_{\mathcal{S}^{d-1} \cap e_1^T} \max(2\varepsilon - r \cos(\vartheta), 0) \, d\sigma_{d-2}(v) \, d\vartheta \\ &= \frac{2(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(2\varepsilon - r \cos(\vartheta), 0) \sin(\vartheta)^{d-2} \, d\vartheta \\ &= \frac{2(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \int_{\arccos(\frac{2\varepsilon}{r})}^{\frac{\pi}{2}} (2\varepsilon - r \cos(\vartheta)) \sin(\vartheta)^{d-2} \, d\vartheta \\ &= \frac{2(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \left[2\varepsilon \int_{\arccos(\frac{2\varepsilon}{r})}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)^{d-2} \, d\vartheta - r \int_{\arccos(\frac{2\varepsilon}{r})}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)^{d-2} \, d\vartheta \right]. \end{aligned}$$

Benutzen wir die Eigenschaft

$$\sin(\arccos(z)) = \sqrt{1-z^2}, \quad z \in (-1, 1),$$

so erhalten wir für die letzte Gleichungskette

$$\begin{aligned} & \frac{2(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \left[2\varepsilon \int_{\arccos(\frac{2\varepsilon}{r})}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)^{d-2} \, d\vartheta - \frac{r}{d-1} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{2\varepsilon}{r} \right)^2 \right)^{\frac{d-1}{2}} \right) \right] \\ &=: \frac{2(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \left(I_1(\varepsilon) - r I_2(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Offensichtlich sind I_1 und I_2 stetig differenzierbar auf $(0, r)$. Damit gilt

$$\left(\frac{I_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)' = -2 \sin \left(\arccos \left(\frac{2\varepsilon}{r} \right) \right)^{d-2} \left(- \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\varepsilon}{r} \right)^2}} \frac{2}{r} \right) \rightarrow \frac{4}{r}, \quad \varepsilon \rightarrow 0+,$$

und der Satz von L'Hôpital liefert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I_1(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{I_1(\varepsilon)}{\varepsilon}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{I_1(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)'}{1} = \frac{4}{r}.$$

Ebenso gelangen wir mithilfe des Satzes von L'Hôpital und unter Beachtung von

$$I_2(\varepsilon)' = \frac{1}{d-1} \frac{d-1}{2} \left(1 - \left(\frac{2\varepsilon}{r}\right)^2\right)^{\frac{d-3}{2}} \frac{8\varepsilon}{r^2} = \frac{4\varepsilon}{r^2} \left(1 - \left(\frac{2\varepsilon}{r}\right)^2\right)^{\frac{d-3}{2}}$$

zu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4\varepsilon}{r^2} \left(1 - \left(\frac{2\varepsilon}{r}\right)^2\right)^{\frac{d-3}{2}}}{2\varepsilon} = \frac{2}{r^2}.$$

Daraus resultiert insgesamt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(\mathbf{0})] \cap [B_\varepsilon^d(re_1)]) = \frac{(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \frac{1}{r}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass auch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K] \cap [B_\varepsilon^d(y) \cap K]) = \frac{(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \frac{1}{\|x-y\|}$$

für alle $x, y \in K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ gilt. Dafür genügt es zu untersuchen, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K] \cap [B_\varepsilon^d(y) \cap K]) = 0 \quad (3.26)$$

für alle $x, y \in K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ mit $B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y) \not\subset K$ gilt. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $x, y \notin \partial K$ gilt. Dann existiert aber ein $\varepsilon' > 0$, so dass entweder $B_{\varepsilon'}^d(x) \cap K = \emptyset$ oder $B_{\varepsilon'}^d(y) \cap K = \emptyset$ vorliegt. Daher ist (3.26) bewiesen und die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 3.18. Die Funktionen I_1 und I_2 aus dem Beweis von Lemma 3.17 werden für den Beweis von Satz 3.14 wichtig sein. Für diese werden Abschätzungen nach oben nötig sein. Einerseits erhalten wir für I_1 unter Verwendung von $0 \leq \sin(z) \leq 1$ und $\arcsin(z) = \frac{\pi}{2} - \arccos(z)$ für $z \in [0, \frac{\pi}{2}]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 \leq I_1(\varepsilon) &= 2\varepsilon \int_{\arccos\left(\frac{2\varepsilon}{\|x-y\|}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)^{d-2} d\vartheta \leq 2\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{2\varepsilon}{\|x-y\|}\right)\right) \\ &= 2\varepsilon \arcsin\left(\frac{2\varepsilon}{\|x-y\|}\right) \leq \frac{2\pi\varepsilon^2}{\|x-y\|}, \end{aligned}$$

da \arcsin konvex mit $\arcsin(0) = 0$ und $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ ist. Die Konvexität von \arcsin erfolgt unmittelbar aus

$$\arcsin''(z) = \frac{z}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

für alle $z \in (0, 1)$ und somit

$$\arcsin(z) \leq \frac{\pi}{2}z$$

für alle $z \in [0, 1]$. Andererseits können wir anhand der Additionstheoreme sehen, dass

$$\begin{aligned} 0 \leq I_2(\varepsilon) &= \int_{\arccos\left(\frac{2\varepsilon}{\|x-y\|}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)^{d-2} d\vartheta \leq \int_{\arccos\left(\frac{2\varepsilon}{\|x-y\|}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) d\vartheta \\ &\leq 1 - \sin\left(\arccos\left(\frac{2\varepsilon}{\|x-y\|}\right)\right) = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\varepsilon}{\|x-y\|}\right)^2} \leq \frac{4\varepsilon^2}{\|x-y\|^2}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt

$$1 - z^2 \leq \sqrt{1 - z^2}, \quad z \in [0, 1],$$

verwendet haben.

Insbesondere liefert Bemerkung 3.17 unter Berücksichtigung des Beweises von Lemma 3.16 für $\varepsilon \in (0, 1]$ die Abschätzung

$$\frac{1}{4\varepsilon^2} \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K] \cap [B_\varepsilon^d(y) \cap K]) \leq \frac{(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \frac{\pi + 1}{\|x-y\|} \quad (3.27)$$

für alle $x, y \in K \oplus B_1^d$ mit $\|x-y\| > 0$.

Anschließend werden wir versuchen, eine Majorante für die Funktion

$$\frac{1}{4\varepsilon^2} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| > 2\varepsilon\}} h(x, y)$$

aus (3.21) zu finden, um den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden zu können. Dazu müssen wir die Funktion

$$J_\varepsilon(x, y) := \frac{e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K])} e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])} - e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x, y) \cap K])}}{\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x, y) \cap K]) - \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) - \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])}}$$

gleichmäßig nach oben abschätzen. Dabei setzen wir $\hat{K}_\neq^2 := \{(v, w) \in \hat{K}^2 : v \neq w\}$ für $\hat{K} \in \hat{\mathcal{K}}^d$.

Lemma 3.19. *Es gilt für $\varepsilon \in (0, 1]$*

$$\mathbb{1}_{\{\|x-y\| > 2\varepsilon\}} \mathbb{1}_{\{(x, y) \in (K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))^2\}} J_\varepsilon(x, y) \leq \mathbb{1}_{\{(x, y) \in (K \oplus B_1^d)_\neq^2\}} \frac{1 - e^{-2t\|x-y\|}}{\gamma_{d,0}\|x-y\|}$$

und für $\varepsilon \rightarrow 0+$

$$\mathbb{1}_{\{\|x-y\| > 2\varepsilon\}} \mathbb{1}_{\{(x, y) \in (K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))^2\}} J_\varepsilon(x, y) \rightarrow \mathbb{1}_{\{(x, y) \in K_\neq^2\}} \frac{1 - e^{-t\gamma_{d,0}\|x-y\|}}{\gamma_{d,0}\|x-y\|}.$$

Beweis. Wir werden zunächst zeigen, dass die Funktion

$$f(v, w) := \frac{e^{-v} - e^{-w}}{w - v}$$

für alle v, w mit $0 \leq v < w$ die Bedingung

$$f(v, w) \leq \frac{1 - e^{-w}}{w} \quad (3.28)$$

erfüllt. Es genügt zu untersuchen, dass $f(v, w)$ in v monoton fallend auf $[0, w)$ für alle $w > 0$ ist. Falls diese Monotonie vorliegt, so folgt (3.28) mit $v = 0$. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(v, w) &= \frac{e^{-v} - e^{-w}}{(w - v)^2} - \frac{e^{-v}}{w - v} = \frac{e^{-v} - e^{-w} - (w - v)e^{-v}}{(w - v)^2} \\ &= \frac{e^{-v}(1 - (w - v)) - e^{-w}}{(w - v)^2}. \end{aligned}$$

Dann führt die Abschätzung

$$1 - e^{-z} \leq z, \quad z > 0,$$

zu

$$e^{-v}(1 - (w - v)) - e^{-w} \leq e^{-v}e^{-(w-v)} - e^{-w} = 0,$$

so dass $f(v, w)$ in v monoton fallend auf $[0, w)$ ist. Wir setzen nun

$$w = t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x, y) \cap K]), \quad v = t(\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) + \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])).$$

Daher müssen wir noch

$$t \frac{e^{-v} - e^{-w}}{w - v} \leq \frac{1 - e^{-2t\|x-y\|}}{\gamma_{d,0}\|x-y\|}$$

prüfen. Aufgrund der Invarianz von Λ_d^{iso} ergibt sich für alle $x, y \in K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ mit $\varepsilon > 0$

$$\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x, y) \cap K]) \geq \Lambda_d^{iso}([B_0(x, y)]) = \gamma_{d,0}\|x-y\|.$$

Falls nun $v < w$ ist, erhalten wir unter Verwendung von (3.28) und der Monotonie von Λ_d^{iso} für alle $x, y \in K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ mit $\|x-y\| > 2\varepsilon$ und $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} t \frac{e^{-v} - e^{-w}}{w - v} &\leq t \frac{1 - e^{-w}}{w} = \frac{1 - e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x, y) \cap K])}}{\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x, y) \cap K])} \\ &\leq \frac{1 - e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_{\|x-y\|}^d(\frac{x+y}{2})])}}{\Lambda_d^{iso}([B_0(x, y)])} = \frac{1 - e^{-t\gamma_{d,0}V_1(B_1^d)\|x-y\|}}{\gamma_{d,0}\|x-y\|}. \end{aligned}$$

Falls aber andererseits $v > w$ gilt, so liefert (3.28) ebenfalls für alle $x, y \in K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ mit $\|x-y\| > 2\varepsilon$ und $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} t \frac{e^{-v} - e^{-w}}{w - v} &= t \frac{e^{-w} - e^{-v}}{v - w} \leq t \frac{1 - e^{-v}}{v} = \frac{1 - e^{-t(\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) + \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K]))}}{\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) + \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])} \\ &\leq \frac{1 - e^{-2t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(\mathbf{0})])}}{\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x, y) \cap K])} \leq \frac{1 - e^{-2t\varepsilon\gamma_{d,0}V_1(B_1^d)}}{\gamma_{d,0}\|x-y\|} \leq \frac{1 - e^{-t\gamma_{d,0}V_1(B_1^d)\|x-y\|}}{\gamma_{d,0}\|x-y\|}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\gamma_{d,0} V_1(B_1^d) = \frac{\binom{d-1}{0} \kappa_{d-1} \kappa_1}{\binom{d}{1} \kappa_d \kappa_0} \frac{d \kappa_d}{\kappa_{d-1}} = 2$$

und

$$\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon(x, y) \cap K]) \rightarrow \gamma_{d,0} \|x - y\|, \quad \varepsilon \rightarrow 0+,$$

für alle $(x, y) \in K_{\neq}^2$ folgt die Behauptung. \square

Mit dem bisher Gezeigten lässt sich nun eine Majorante für $\frac{1}{4\varepsilon^2} \mathbb{1}_{\{\|x-y\|>2\varepsilon\}} h(x, y)$ finden und einen Beweis zu Satz 3.14 angeben.

Beweis von Satz 3.14. Die Gültigkeit von (3.18) folgt aus den Rechnungen zu (3.20) und (3.21) für allgemeine Maße Λ_d . Damit sei nun $\Lambda_d = \Lambda_d^{iso}$. Wir haben gesehen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^2] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| \leq 2\varepsilon\}} h(x, y) \, dx \, dy \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| > 2\varepsilon\}} h(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

mit

$$h(x, y) = 1 - 2(1 - T_{Y_K(t)}(B_\varepsilon^d(x) \cap K)) + 1 - T_{Y_K(t)}((B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K)$$

gilt. Hierbei hat Lemma 3.16 gezeigt, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| \leq 2\varepsilon\}} h(x, y) \, dx \, dy = 0,$$

womit der erste Summand keinen Einfluss auf den Grenzwert hat.

Es gilt

$$\int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| > 2\varepsilon\}} h(x, y) \, dx \, dy = \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| > 2\varepsilon\}} \hat{h}(x, y) \, dx \, dy$$

für

$$\begin{aligned} \hat{h}(x, y) &:= 1 - (1 - T_{Y_K(t)}(B_\varepsilon^d(x) \cap K)) - (1 - T_{Y_K(t)}(B_\varepsilon^d(y) \cap K)) \\ &\quad + 1 - T_{Y_K(t)}((B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K). \end{aligned}$$

Wenden wir nun Lemma 3.19 und (3.27) auf (3.23) an, dann bekommen wir für alle $x, y \in$

$K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})$ mit $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{1}_{\{\|x-y\|>2\varepsilon\}} \hat{h}(x, y) \\
&= 1 - e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K])} - t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) + 1 - e^{-t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])} - t\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K]) \\
&\quad + 1 - T_{Y_K(t)}((B_\varepsilon^d(x) \cup B_\varepsilon^d(y)) \cap K) + t(\Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) + \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(y) \cap K])) \\
&\leq \varepsilon^2 \mathbb{1}_{\{(x,y) \in (K \oplus B_1^d)^2\}} \left(t^2 \Lambda_d^{iso}([B_1^d])^2 + 2t^2 \Lambda_d^{iso}([B_1^d])^2 + \frac{(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \frac{\pi+1}{\|x-y\|} \frac{1-e^{-2t\|x-y\|}}{\gamma_{d,0}\|x-y\|} \right) \\
&= \varepsilon^2 \mathbb{1}_{\{(x,y) \in (K \oplus B_1^d)^2\}} \left(12t^2 + \frac{(\pi+1)(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \frac{1-e^{-2t\|x-y\|}}{\gamma_{d,0}\|x-y\|^2} \right) \\
&= \varepsilon^2 \mathbb{1}_{\{(x,y) \in (K \oplus B_1^d)^2\}} \left(12t^2 + \frac{(\pi+1)(d-1)}{2} \frac{1-e^{-2t\|x-y\|}}{\|x-y\|^2} \right) =: \varepsilon^2 g(x, y),
\end{aligned}$$

indem wir noch von

$$|1 - e^{-z} - z| = \left| \int_0^z e^{-w} - 1 \, dw \right| \leq \int_0^z w \, dw = \frac{1}{2} z^2, \quad z > 0,$$

Gebrauch gemacht haben. Es wird als Nächstes gezeigt, dass die Funktion g Lebesgue-integrierbar ist. Es gilt nämlich unter Verwendung von sphärischen Koordinaten und des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, y) \, dx \, dy \\
&= 12t^2 V_d(K \oplus B_1^d)^2 + \frac{(\pi+1)(d-1)}{2} \int_{K \oplus B_1^d} \int_{K \oplus B_1^d} \frac{1-e^{-2t\|x-y\|}}{\|x-y\|^2} \, dx \, dy \\
&= 12t^2 V_d(K \oplus B_1^d)^2 + \frac{(\pi+1)(d-1)}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K \oplus B_1^d}(x+y) \mathbb{1}_{K \oplus B_1^d}(y) \frac{1-e^{-2t\|x\|}}{\|x\|^2} \, dx \, dy \\
&= 12t^2 V_d(K \oplus B_1^d)^2 + \frac{(\pi+1)(d-1)}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-e^{-2t\|x\|}}{\|x\|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K \oplus B_1^d}(x+y) \mathbb{1}_{K \oplus B_1^d}(y) \, dy \, dx \\
&= 12t^2 V_d(K \oplus B_1^d)^2 + \frac{(\pi+1)(d-1)}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1-e^{-2t\|x\|}}{\|x\|^2} \gamma_{K \oplus B_1^d}(x) \, dx \\
&= 12t^2 V_d(K \oplus B_1^d)^2 + \frac{d(d-1)(\pi+1)\kappa_d}{2} \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \frac{1-e^{-2tr}}{r^2} \gamma_{K \oplus B_1^d}(ru) r^{d-1} \, d\nu_{d-1}(u) \, dr,
\end{aligned}$$

wobei

$$\gamma_K(z) = V_d(K \cap (K \oplus \{z\})), \quad z \in \mathbb{R}^d,$$

das Kovariogramm von K bezeichnet, siehe Definition 4.1. Über das Kovariogramm werden wir im nächsten Kapitel ausführlich diskutieren. Offensichtlich können wir aus der Definition die Abschätzung

$$\gamma_{K \oplus B_1^d}(ru) \leq \mathbb{1}_{\{0 < r \leq \text{diam}(K \oplus B_1^d)\}} V_d(K \oplus B_1^d)$$

für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ ableiten. Daher haben wir

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^{d-1}} (1 - e^{-2tr}) \gamma_{K \oplus B_1^d}(ru) r^{d-3} d\nu_{d-1}(u) dr \\ & \leq V_d(K \oplus B_1^d) \int_0^{\text{diam}(K \oplus B_1^d)} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} (1 - e^{-2tr}) r^{d-3} d\nu_{d-1}(u) dr \\ & \leq V_d(K \oplus B_1^d) \int_0^{\text{diam}(K \oplus B_1^d)} 2tr^{d-2} dr \\ & \leq \frac{2t}{d-1} V_d(K \oplus B_1^d) \text{diam}(K \oplus B_1^d)^{d-1} < \infty \end{aligned}$$

und erhalten insgesamt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, y) dx dy < \infty.$$

Deswegen ist der Satz von der majorisierten Konvergenz anwendbar. Dies führt uns mithilfe von Lemma 3.17 und 3.19 zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^2] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| > 2\varepsilon\}} \hat{h}(x, y) dx dy \\ &= \int_K \int_K \frac{t^2 \Lambda_d^{iso}([B_1^d])^2}{4} + \frac{(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{1 - e^{-t\gamma_{d,0}\|x-y\|}}{\gamma_{d,0}\|x-y\|} dx dy \\ &= t^2 V_d(K)^2 + \frac{d-1}{2} \int_K \int_K \frac{1 - e^{-t\gamma_{d,0}\|x-y\|}}{\|x-y\|^2} dx dy, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \Lambda_d^{iso}([B_\varepsilon^d(x) \cap K]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \varepsilon \Lambda_d^{iso}([B_1^d(x) \cap \varepsilon^{-1}K]) = \Lambda_d^{iso}([B_1^d])$$

verwendet haben. □

Bemerkung 3.20. Man macht sich schnell klar, dass man anhand des Kapazitätsfunktionalis jedes beliebige Moment der Gesamtoberfläche von $Y_K(t)$ für $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ und $t > 0$ berechnen kann. Die Formel von Sylvester (Inklusion-Exkursion-Prinzip) liefert zusammen mit dem Satz von Fubini für alle $k \geq 3$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^k] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{(2\varepsilon)^k} \mathbb{E} \left[\left(\int_{K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})} \mathbb{1}_{Y_K(t) \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0})}(s) ds \right)^k \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{(2\varepsilon)^k} \int_{(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))^k} \mathbb{P} \left(\bigcap_{\ell=1}^k \{Y_K(t) \cap B_\varepsilon^d(x_\ell) \neq \emptyset\} \right) dx^k \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{(2\varepsilon)^k} \int_{(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))^k} 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{\ell=1}^k \{Y_K(t) \cap B_\varepsilon^d(x_\ell) = \emptyset\} \right) dx^k \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{(2\varepsilon)^k} \int_{(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))^k} 1 - \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I = \ell}} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} \{Y_K(t) \cap B_\varepsilon^d(x_i) = \emptyset\} \right) dx^k \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{(2\varepsilon)^k} \int_{(K \oplus B_\varepsilon^d(\mathbf{0}))^k} 1 - \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I = \ell}} 1 - T_{Y_K(t)} \left(\bigcup_{i \in I} B_\varepsilon^d(x_i) \cap K \right) dx^k,
\end{aligned}$$

wobei dx^k als $dx_1 \cdots dx_k$ zu verstehen ist.

Nach Korollar 3.15 haben wir gesehen, dass die Varianz der Gesamtoberfläche von $Y_K(t)$ die Gleichung

$$\text{Var}(V_{d-1}(Y_K(t))) = \frac{d-1}{2} \int_K \int_K \frac{1 - e^{-t\gamma_{d,0}\|x-y\|}}{\|x-y\|^2} dx dy$$

erfüllt. Wie im Beweis zu Satz 3.14 wenden wir darauf sphärische Koordinaten an und erhalten

$$\text{Var}(V_{d-1}(Y_K(t))) = \frac{d(d-1)\kappa_d}{2} \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_K(ru) (1 - e^{-t\gamma_{d,0}r}) r^{d-3} d\nu_{d-1}(u) dr.$$

Im kommenden Kapitel werden wir uns insbesondere für die Asymptotik der Gesamtoberfläche eines lokalen STIT Mosaiks $Y_{K_R}(t)$ in einem wachsenden, konvexen und kompakten Beobachtungsfenster $K_R := R \cdot K$, $R \rightarrow \infty$, interessieren, wobei wir zusätzliche Voraussetzungen an K stellen. Eine Möglichkeit wird sein, das asymptotische Verhalten des eindimensionalen Kovariogrammes $\gamma_K(\cdot u) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $u \in \mathcal{S}^{d-1}$, in $0+$ zu untersuchen.

Kapitel 4

Das Kovariogramm

In diesem Kapitel untersuchen wir das Kovariogramm eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^d$. Dabei interessieren wir uns für eine Taylorentwicklung des eindimensionalen Kovariogrammes in $0+$. Tatsächlich können wir für gewisse konvexe Körper, die einen k -mal stetig differenzierbaren Rand mit strikt positiven Hauptkrümmungen besitzen, ein Taylorpolynom der Ordnung $k \geq 3$ in $0+$ angeben. Schließlich finden wir einige Anwendungsbeispiele in der Stochastischen Geometrie, in der eine Taylorentwicklung des eindimensionalen Kovariogrammes nützlich ist.

4.1 Asymptotische Entwicklungen des Kovariogrammes

Zunächst werden wir den Begriff des Kovariogrammes und der isotropierten Mengen-Kovarianzfunktion für konvexe Körper einführen.

Definition 4.1. *Es sei $K \in \mathcal{K}^d$ gegeben. Dann heißt die Funktion $\gamma_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit*

$$\gamma_K(y) = V_d(K \cap (K \oplus \{y\})) \quad (4.1)$$

das Kovariogramm von K .

Weiterhin ist $\bar{\gamma}_K : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\bar{\gamma}_K(r) = \int_{S^{d-1}} \gamma_K(ru) \, d\nu_{d-1}(u) \quad (4.2)$$

die isotropierte Mengen-Kovarianzfunktion von K .

Aus der Definition des Kovariogrammes erhält man unmittelbar

$$0 \leq \gamma_K(y) \leq \gamma_K(\mathbf{0}) = V_d(K) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^d, \quad (4.3)$$

wobei hier wieder $\mathbf{0}$ der Nullvektor in \mathbb{R}^d ist. Außerdem sieht man leicht, dass γ_K für ein $K \in \mathcal{K}^d$ eine stetige, gerade und isometrieinvariante Funktion charakterisiert. Die letzten

beiden Eigenschaften bedeuten, dass γ_K die Bedingungen $\gamma_K(y) = \gamma_K(-y)$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ und $\gamma_{gK} = \gamma_K$ für alle euklidischen Bewegungen g erfüllt, wobei eine euklidische Bewegung entweder eine Spiegelung, eine Rotation oder eine Translation darstellt. Für den Fall $d = 1$ bekommen wir mit $K \in \mathcal{K}^1$

$$\gamma_K(y) = V_1(K) - |y|, \quad |y| \leq V_1(K).$$

Daraus schließen wir, dass das Kovariogramm von $K \in \mathcal{K}^1$ in $y = 0$ nicht differenzierbar ist, aber dennoch eine Taylorreihe in $y = 0+$ besitzt. Die Nicht-Differenzierbarkeit für $d \geq 2$ wurde insbesondere in [21] verifiziert. Wir betrachten nun das eindimensionale Kovariogramm $\gamma_K(\cdot, u) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\gamma_K(ru) = V_d(K \cap (K \oplus \{ru\}))$, für eine feste Richtung $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ und $K \in \mathcal{K}^d$ mit $d \geq 2$. Dazu sagen wir, dass γ_K eine Taylorentwicklung in $0+$ besitzt, falls das eindimensionale Kovariogramm $\gamma_K(\cdot, u)$ eine Taylorentwicklung in $0+$ für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ hat.

Zunächst betrachten wir den Spezialfall $K = B_1^d$.

Lemma 4.2. *Die Taylorreihe von $\gamma_{B_1^d}(\cdot, u)$ in $0+$ ist für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ gegeben durch*

$$\gamma_{B_1^d}(ru) = \kappa_d + \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{2\ell+1} r^{2\ell+1}, \quad (4.4)$$

falls $r \leq 2$, und $\gamma_{B_1^d}(ru) = 0$, falls $r > 2$. Die Konstanten $c_{2\ell+1}$, $\ell \geq 0$, sind durch

$$c_{2\ell+1} = 2\kappa_{d-1} \frac{\partial^{2\ell+1} g}{\partial t^{2\ell+1}}(0+)$$

mit

$$g(t) := \int_{\frac{t}{2}}^1 (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx$$

bestimmt.

Falls d sogar ungerade ist, ist die Taylorreihe in (4.4) endlich mit

$$c_{2\ell+1} = \kappa_{d-1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell+1)2^\ell} \binom{\frac{d-1}{2}}{\ell}$$

für alle $\ell \leq \frac{d-1}{2}$ und $c_{2\ell+1} = 0$ für alle $\ell > \frac{d-1}{2}$.

Beweis. Das Prinzip von Cavalieri führt uns zu

$$\gamma_{B_1^d}(ru) = 2\kappa_{d-1} \int_{\frac{r}{2}}^1 (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx = 2\kappa_{d-1} g(r) \quad (4.5)$$

für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ und $r \leq 2$. Es ist leicht zu sehen, dass die Funktion g glatt auf $(0, \infty)$ mit erster Ableitung

$$g'(r) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^{\frac{d-1}{2}}$$

ist. Diese Funktion ist gerade und besitzt eine Taylorreihe in $r = 0+$. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Wir nehmen nun an, dass d ungerade ist. Dann ergibt sich

$$\gamma_{B_1^d}(ru) = \kappa_d + \sum_{\ell=0}^{\frac{d-1}{2}} c_{2\ell+1} r^{2\ell+1}$$

für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ und $r \leq 2$. Wenden wir die Integraldarstellung aus (4.5) an, folgern wir, dass

$$\begin{aligned} \gamma_{B_1^d}(ru) &= 2\kappa_{d-1} \sum_{\ell=0}^{\frac{d-1}{2}} (-1)^\ell \binom{\frac{d-1}{2}}{\ell} \int_{\frac{r}{2}}^1 x^{2\ell} dx \\ &= 2\kappa_{d-1} \sum_{\ell=0}^{\frac{d-1}{2}} \frac{(-1)^\ell}{2\ell+1} \binom{\frac{d-1}{2}}{\ell} \left[1 - \left(\frac{r}{2}\right)^{2\ell+1}\right] \\ &= \kappa_d + \kappa_{d-1} \sum_{\ell=0}^{\frac{d-1}{2}} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell+1)2^\ell} \binom{\frac{d-1}{2}}{\ell} r^{2\ell+1} \end{aligned}$$

für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ und $r \leq 2$ gilt. Hier bemerken wir, dass die Reihe die Gleichung

$$2\kappa_{d-1} \sum_{\ell=0}^{\frac{d-1}{2}} \frac{(-1)^\ell}{2\ell+1} \binom{\frac{d-1}{2}}{\ell} = 2\kappa_{d-1} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx = \kappa_d$$

erfüllt. Dies liefert die Behauptung. \square

Der Beweis hat insbesondere gezeigt, dass die isotropierte Mengen-Kovarianzfunktion von B_1^d durch

$$\bar{\gamma}_{B_1^d}(r) = \kappa_d + \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{2\ell+1} r^{2\ell+1}, \quad r \leq 2,$$

bestimmt ist, wobei die Konstanten $c_{2\ell+1}$ wie in Lemma 4.2 zu wählen sind.

Darauf aufbauend untersuchen wir nun das Kovariogramm eines affinen Bildes von B_1^d , d.h. eines Ellipsoides, welches durch

$$E_{d,Q} := \{x \in \mathbb{R}^d : x^T Q x \leq 1\} \quad (4.6)$$

definiert ist, wobei $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine positiv definite Matrix ist. Es soll daran erinnert werden, dass Q eine Quadratwurzel in Form von $Q^{\frac{1}{2}}$ besitzt. Weiterhin sieht man leicht, dass für

$Q = R^{-2}I_d$ mit $R > 0$ vor allem $E_{d,Q} = B_R^d(\mathbf{0})$ gilt, wobei hier I_d die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{d \times d}$ beschreibt. Unter Verwendung von Lemma 4.2 sind wir in der Lage, das Kovariogramm und die isotropierte Mengen-Kovarianzfunktion von $E_{d,Q}$ anzugeben. Dabei bezeichnet $\det A$ die Determinante von $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $\text{inr } K$ den Inradius von K , den größten Radius einer Kugel mit $B_{\text{inr } K}^d(x) \subset K$ für ein $x \in K$.

Lemma 4.3. *Das Kovariogramm von $E_{d,Q}$ ist für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ und $r \geq 0$ durch*

$$\gamma_{E_{d,Q}}(ru) = (\det Q)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{B_1^d}(r(Q^{\frac{1}{2}}u)) \quad (4.7)$$

gegeben.

Falls $r \leq \text{inr } E_{d,Q}$ gilt, dann erfüllt die isotropierte Mengen-Kovarianzfunktion von $E_{d,Q}$ die Eigenschaft

$$\bar{\gamma}_{E_{d,Q}}(r) = (\det Q)^{-\frac{1}{2}} \left(\kappa_d + \sum_{\ell=0}^{\infty} d_{2\ell+1} r^{2\ell+1} \right)$$

mit

$$d_{2\ell+1} = c_{2\ell+1} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \|Q^{\frac{1}{2}}u\|^{2\ell+1} d\nu_{d-1}(u)$$

für alle $\ell \geq 0$, wobei die Konstanten $c_{2\ell+1}$, $\ell \geq 0$, denen aus Lemma 4.2 entsprechen. Ebenso ist die Taylorreihe in (4.7) endlich, falls d gerade ist.

Beweis. Das Lebesgue-Maß unter einer linearen Transformation liefert für alle $r \geq 0$ und $u \in \mathcal{S}^{d-1}$

$$\begin{aligned} \gamma_{E_{d,Q}}(ru) &= V_d(E_{d,Q} \cap (E_{d,Q} \oplus \{ru\})) \\ &= V_d(Q^{-\frac{1}{2}}B_1^d \cap (Q^{-\frac{1}{2}}B_1^d \oplus \{Q^{-\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}ru\})) \\ &= \det(Q^{-\frac{1}{2}}) \gamma_{B_1^d}(r(Q^{\frac{1}{2}}u)) \\ &= (\det Q)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{B_1^d}(r(Q^{\frac{1}{2}}u)). \end{aligned}$$

Darauf wenden wir den Satz von der majorisierten Konvergenz und Lemma 4.2 an und bekommen für die isotropierte Mengen-Kovarianzfunktion

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{E_{d,Q}}(r) &= \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_{E_{d,Q}}(ru) d\nu_{d-1}(u) \\ &= (\det Q)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_{B_1^d}(r(Q^{\frac{1}{2}}u)) d\nu_{d-1}(u) \\ &= (\det Q)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_{B_1^d}\left(r\|Q^{\frac{1}{2}}u\| \frac{Q^{\frac{1}{2}}u}{\|Q^{\frac{1}{2}}u\|}\right) d\nu_{d-1}(u) \\ &= (\det Q)^{-\frac{1}{2}} \left(\kappa_d + \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{2\ell+1} r^{2\ell+1} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \|Q^{\frac{1}{2}}u\|^{2\ell+1} d\nu_{d-1}(u) \right) \end{aligned}$$

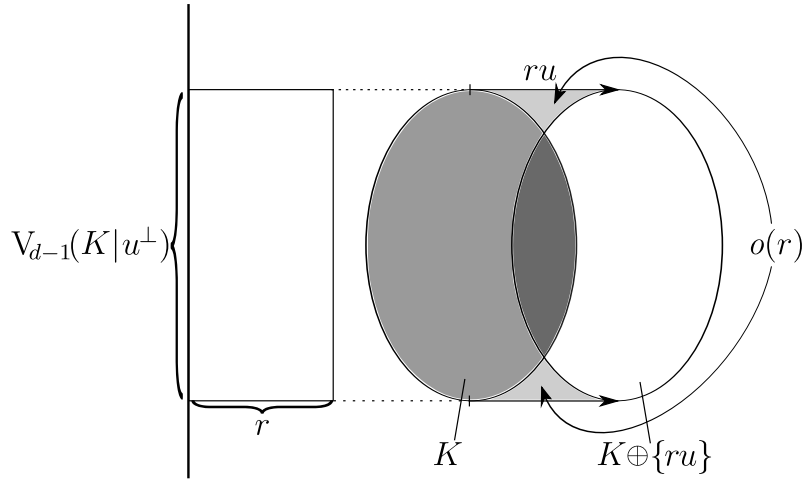


Abbildung 4.1: Das Kovariogramm von $K \in \mathcal{K}_+^k$ in Richtung $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ mit $k \geq 3$.

für alle $r \leq \text{inr } E_{d,Q}$ und die Behauptung folgt. \square

Wir haben gesehen, dass für $\gamma_{E_{d,Q}}(\cdot u)$ eine Taylorreihe in $0+$ für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ und für alle positiv definiten Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ existiert. Da jedes Ellipsoid einen glatten Rand mit strikt positiven Hauptkrümmungen besitzt, stellt sich die Frage, ob wir eine Taylorentwicklung der Ordnung $k \geq 3$ für konvexe Körper mit k -mal stetig differenzierbaren Rändern und strikt positiven Hauptkrümmungen erhalten können. Im Folgenden werden wir eine positive Antwort liefern.

Wir bezeichnen mit \mathcal{K}_+^k für $k \geq 2$ das Mengensystem aller nichtleeren konvexen Körper, deren Ränder k -mal stetig differenzierbar und deren Hauptkrümmungen strikt positiv sind. Weiterhin bezeichnet u^\perp der orthogonale lineare Unterraum und $K|u^\perp$ steht für die orthogonale Projektion von K auf u^\perp . Wir nehmen an, dass $K \in \mathcal{K}_+^k$ für $k \geq 3$ gilt. Dann veranschaulicht Abbildung 4.1, dass

$$\gamma_K(ru) = V_d(K) - V_{d-1}(K|u^\perp)r + o(r), \quad r \rightarrow 0+, \quad (4.8)$$

für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ gilt, wobei $o(r)$ eine Funktion $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{g(r)}{r} = 0$ beschreibt.

Dabei ist der Fehlerterm die Summe der in leicht grau gefärbten Volumina in Abbildung 4.1, und wir werden später sehen, dass dieser langsamer als eine lineare Funktion für $r \rightarrow 0+$ wächst. Die Taylorentwicklung erster Ordnung in (4.8) wurde für allgemeinere Mengen mit endlichem Perimeter in [21] verifiziert. In den nachfolgenden Ausführungen werden wir den Fehlerterm in (4.8) untersuchen.

Für $K \in \mathcal{K}_+^k$, $k \geq 3$, gibt es für alle $x \in \partial K$ eine Umgebung um x in ∂K , so dass ∂K durch eine strikt konvexe Funktion f_x approximiert werden kann, siehe [55] für mehr Details. Die Konstruktion der Funktion f_x funktioniert wie folgt:

Für eine lokale Parametrisierung von K , vielmehr von ∂K , verwenden wir Zylinderkoordinaten. Dafür schreiben wir $\mathbb{R}^{d-1} = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{S}^{d-2}$ mithilfe von sphärischen Koordinaten. Somit parametrisieren wir $\mathbb{R}^d = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{S}^{d-2}) \times \mathbb{R}$ und identifizieren einen Punkt in \mathbb{R}^d mit (yv, z) , $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $v \in \mathcal{S}^{d-2}$, $z \in \mathbb{R}$. Zusätzlich interpretieren wir ohne Einschränkung x als Ursprung und identifizieren die Stützhyperebene von ∂K in x mit $\{z = 0\}$ derart, dass K im Halbraum $\{z \geq 0\}$ liegt. Dann sagt [55, Lemma 2] einschließlich der dort genannten Referenzen, dass eine Umgebung um x in ∂K existiert, so dass ∂K durch eine strikt konvexe Funktion f_x mit der Eigenschaft

$$z = f_x(yv) = b_2(v)y^2 + b_3(v)y^3 + \dots + b_{k-1}(v)y^{k-1} + \mathcal{O}(y^k), \quad y \rightarrow 0+, \quad (4.9)$$

approximiert wird. Hier steht $\mathcal{O}(y^k)$ für eine Funktion $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\limsup_{y \rightarrow 0+} \frac{g(y)}{y^k} \in \mathbb{R}$, die unabhängig von x und v ist. Für den Fall $d = 2$ kann (4.9) sogar zu

$$z = f_x(yv) = b_2(v)y^2 + b_3(v)y^3 + \dots + b_k(v)y^k + o(y^k), \quad y \rightarrow 0+, \quad (4.10)$$

verschärft werden. Dabei charakterisiert $o(y^k)$ eine Funktion $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\limsup_{y \rightarrow 0+} \frac{g(y)}{y^k} = 0$, welche zusätzlich unabhängig von v , aber nicht unbedingt unabhängig von x ist. Die Koeffizienten $b_2(v), b_3(v), b_4(v), \dots$ sind stetig in v für festes x und durch eine von x und v unabhängige Konstante beschränkt. Zudem sind b_2, b_4, b_6, \dots gerade und b_3, b_5, b_7, \dots ungerade Funktionen auf \mathcal{S}^{d-2} . Bei geeigneter Wahl des kartesischen Koordinatensystems in \mathbb{R}^{d-1} kann der Koeffizient $b_2(v)$ in der Gestalt von

$$b_2(v) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{d-1} k_\ell(x) (v^T e_\ell)^2 \quad (4.11)$$

vereinfacht dargestellt werden, wobei $k_\ell(x)$, $\ell \in \{1, \dots, d-1\}$, die Hauptkrümmungen von ∂K in x sind und e_ℓ den ℓ -ten Einheitsvektor in \mathbb{R}^{d-1} beschreibt.

Wir wenden uns dem Fall $d = 2$ zu. Offensichtlich gilt $\mathcal{S}^0 = \{-1, 1\}$. Wir werden später sehen, dass die Taylorentwicklung in (4.8) präzisiert und durch die Taylorentwicklung der Ordnung $k+1$ von γ_K in $0+$ ersetzt werden kann, falls $K \in \mathcal{K}_+^k$ mit $k \geq 2$ gilt. Dafür bezeichnet im Folgenden $x(\pm u^\perp) \in \partial K$ für $u \in \mathcal{S}^1$ den eindeutig bestimmten Punkt, dessen äußerer Normaleneinheitsvektor $\pm u^\perp$ mit der Eigenschaft $u^T(x(\pm u^\perp)) = 0$ ist. Im Gegensatz zu (4.8) ist u^\perp hier als ein Vektor in \mathbb{R}^2 zu verstehen. Unter Beachtung von (4.8) und Abbildung 4.1 müssen wir die zwei in leicht grau gefärbten Flächen berechnen. Und um diese zu berechnen, verwenden wir laut Voraussetzung die asymptotische Entwicklung aus (4.10). Ohne Einschränkung untersuchen wir nur den Fall $x = x(u^\perp)$ und sehen diesen Punkt als Ursprung an. Die zu x gehörende Fläche wird durch

$$\int_0^{i(r)} f_x(y) dy + \int_{i(r)}^r f_x(y-r) dy \quad (4.12)$$

approximiert, wobei

$$f_x(y) = b_2y^2 + b_3y^3 + \dots + b_ky^k + o(y^k), \quad y \rightarrow 0,$$

mit gewissen Konstanten $b_2 > 0$ und $b_3, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ gilt. Ferner beschreibt $i(r) \in (0, r)$ ohne Einschränkung den Schnittpunkt von g_x und $g_x(\cdot - r)$ mit

$$g_x(y) := b_2y^2 + b_3y^3 + \dots + b_ky^k, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Falls die Funktion g_x von der Form

$$g_x(y) = \sum_{\substack{p=2 \\ p \text{ gerade}}}^k b_p y^p, \quad y \in \mathbb{R},$$

ist, so ergibt sich unmittelbar $i(r) = \frac{r}{2}$.

Im Folgenden werden wir die Taylorentwicklung der $(k-1)$ -ten Ordnung von i in $0+$ angeben. Dazu müssen wir zunächst noch die Existenz einer solchen Entwicklung zeigen. Nach Voraussetzung ist die Funktion g_x strikt konvex auf $[-r, r]$ für hinreichend kleines r und kann deshalb dort nur ein lokales Minimum, nämlich das in $y = 0$, besitzen. Dann ist aber die Funktion $h(r, y) := g_x(y) - g_x(y - r)$ streng monoton steigend auf $[0, 2r]$ für ein festes, aber hinreichend kleines r und somit kann $i(r)$ nur eine einfache Nullstelle von $h(r, \cdot)$ sein. Folglich besagt der Satz von der impliziten Funktion, dass i eine Taylorreihe in $0+$ auf $(0, 2r]$ für hinreichend kleines r besitzt. Um das Taylorpolynom T_ℓ von i der Ordnung $\ell \leq k-1$ zu bestimmen, reicht es demnach aus, den Fehler

$$|h(r, T_\ell(r) + \mathcal{O}(r^{\ell+1}))|$$

für $r \rightarrow 0+$ zu minimieren. Dieses Problem ist durch folgende Iteration eindeutig lösbar: Zunächst schreiben wir $i(r) = m_1 \cdot r + \mathcal{O}(r^2)$ für $r \rightarrow 0+$. Das Einsetzen in die Funktion $h(r, \cdot)$ liefert

$$h(r, i(r)) = \sum_{p=2}^k b_p [(m_1 \cdot r + \mathcal{O}(r^2))^p - (\mathcal{O}(r^2) - (1 - m_1) \cdot r)^p], \quad r \rightarrow 0+. \quad (4.13)$$

Wir wählen nun m_1 so, dass der Fehler in (4.13) minimal wird, d.h., der quadratische Anteil muss verschwinden. Für $m_1 = \frac{1}{2}$ ergibt sich $h(r, i(r)) = \mathcal{O}(r^3)$ und für $m_1 \neq \frac{1}{2}$ allerdings $h(r, i(r)) = \mathcal{O}(r^2)$, falls $r \rightarrow 0+$ gilt. Damit erweitern wir $i(r)$ zu

$$i(r) = \frac{r}{2} + m_2 \cdot r^2 + \mathcal{O}(r^3), \quad r \rightarrow 0+.$$

Wie eben minimiert man den Fehler, so dass $h(r, i(r)) = \mathcal{O}(r^4)$ für $r \rightarrow 0+$ gilt, d.h., der

kubische Anteil muss eliminiert werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
h(r, i(r)) &= \sum_{p=2}^k b_p \left[\left(\frac{r}{2} + m_2 \cdot r^2 + \mathcal{O}(r^3) \right)^p - \left(m_2 \cdot r^2 + \mathcal{O}(r^3) - \frac{r}{2} \right)^p \right] \\
&= 2 \sum_{p=2}^k b_p \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ ungerade}}}^p \binom{p}{q} \left(\frac{r}{2} \right)^q \left(m_2 \cdot r^2 + \mathcal{O}(r^3) \right)^{p-q} \\
&= 2b_2 \binom{2}{1} \frac{r}{2} m_2 r^2 + 2b_3 \binom{3}{3} \left(\frac{r}{2} \right)^3 + \mathcal{O}(r^4) \\
&= 2b_2 m_2 r^3 + 2b_3 \left(\frac{r}{2} \right)^3 + \mathcal{O}(r^4), \quad r \rightarrow 0+.
\end{aligned}$$

Löst man die Gleichung

$$2b_2 m_2 + \frac{b_3}{4} = 0$$

nach m_2 auf, so ist der Fehler minimal für $m_2 = -\frac{b_3}{8b_2}$. Für jeden weiteren Koeffizienten eines Ordnungsterms ist lediglich eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten zu lösen, die wegen $b_2 > 0$ immer lösbar ist. Induktiv ergibt sich damit für jedes $\ell \in \{3, \dots, k-1\}$ die Taylorentwicklung von i in $0+$ mit

$$i(r) = \frac{r}{2} - \frac{b_3}{8b_2} r^2 + \sum_{j=3}^{\ell} m_j r^j + \mathcal{O}(r^{\ell+1}), \quad r \rightarrow 0+. \quad (4.14)$$

Lemma 4.4. Für alle $\ell \in \{3, \dots, k-1\}$ gilt

$$i(r) = \frac{r}{2} - \frac{b_3}{8b_2} r^2 + \sum_{\substack{j=4 \\ j \text{ gerade}}}^{\ell} m_j r^j + \mathcal{O}(r^{\ell+1}), \quad r \rightarrow 0+.$$

Beweis. Nach der von oben vorgestellten Iteration erhalten wir für ein beliebiges, aber gerades $\ell \in \{2, \dots, k-1\}$ die Taylorentwicklung der Ordnung ℓ von i in $0+$ in der Form

$$i(r) = \frac{r}{2} - \frac{b_3}{8b_2} r^2 + \sum_{j=3}^{\ell} m_j r^j + \mathcal{O}(r^{\ell+1}), \quad r \rightarrow 0+,$$

wobei für $\ell = 2$ die Summe gleich null gesetzt wird. Setzen wir dies in die Funktion $h(r, \cdot)$ ein, dann erhalten wir für $r \rightarrow 0+$

$$\begin{aligned}
h(r, i(r)) &= 2 \sum_{p=2}^k b_p \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ ungerade}}}^p \binom{p}{q} \left(\frac{r}{2} \right)^q \left(-\frac{b_3}{8b_2} r^2 + \sum_{j=3}^{\ell} m_j r^j + \mathcal{O}(r^{\ell+1}) \right)^{p-q} \\
&= 2 \sum_{p=2}^k b_p \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ ungerade}}}^p \binom{p}{q} \left(\frac{r}{2} \right)^q \left(-\frac{b_3}{8b_2} r^2 + \sum_{j=3}^{\ell} m_j r^j \right)^{p-q} + \mathcal{O}(r^{\ell+2}).
\end{aligned}$$

Für $\ell = 3$ ergibt sich

$$h(r, i(r)) = 2 \sum_{p=2}^k b_p \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ ungerade}}}^p \binom{p}{q} \left(\frac{r}{2}\right)^q \left(-\frac{b_3}{8b_2} r^2 + m_3 r^3\right)^{p-q} + \mathcal{O}(r^5), \quad r \rightarrow 0+.$$

Nach der oben genannten Iteration zur Taylorentwicklung von i in $0+$ muss der Koeffizient des Monoms r^4 verschwinden. Der Beitrag von $p = 2$ zu diesem Koeffizienten ist gerade $b_2 m_3$. Für $p \geq 3$ liefert das Ausmultiplizieren von

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{2}\right)^q \left(-\frac{b_3}{8b_2} r^2 + m_3 r^3\right)^{p-q} &= \frac{1}{2^q} \sum_{s=0}^{p-q} \binom{p-q}{s} \left(-\frac{b_3}{8b_2}\right)^s m_3^{p-q-s} r^{2s} r^{3(p-q-s)} \\ &= \frac{1}{2^q} \sum_{s=0}^{p-q} \binom{p-q}{s} \left(-\frac{b_3}{8b_2}\right)^s m_3^{p-q-s} r^{q+2s+3(p-q-s)} \end{aligned}$$

ein Polynom, welches nicht das Monom r^4 enthalten kann. Denn für $q = 1$ ergibt sich zwangsläufig $s = 0$ und $p = 2$. Dies liefert aber ein Widerspruch zu $p \geq 3$. Des Weiteren ist für $q = 3$ der Exponent ungleich 4. Also muss $m_3 = 0$ gewählt werden. Wir nehmen an, dass die Behauptung für ein gerades $\ell \in \{4, \dots, k-2\}$ gelte. Wir setzen

$$j(r) := -\frac{b_3}{8b_2} r^2 + \sum_{\substack{j=4 \\ j \text{ gerade}}}^{\ell} m_j r^j$$

und erhalten für $\ell + 1$

$$\begin{aligned} h(r, i(r)) &= 2 \sum_{p=2}^k b_p \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ ungerade}}}^p \binom{p}{q} \left(\frac{r}{2}\right)^q \left(j(r) + m_{\ell+1} r^{\ell+1}\right)^{p-q} + \mathcal{O}(r^{\ell+3}) \\ &= 2 \sum_{p=2}^k b_p \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ ungerade}}}^p \binom{p}{q} \sum_{s=0}^{p-q} \binom{p-q}{s} \left(\frac{r}{2}\right)^q j(r)^s (m_{\ell+1} r^{\ell+1})^{p-q-s} + \mathcal{O}(r^{\ell+3}) \end{aligned}$$

für $r \rightarrow 0+$. Ebenfalls besagt die oben vorgestellte Iteration zur Taylorentwicklung von i in $0+$, dass der Koeffizient des Monoms $r^{\ell+2}$ verschwindet. Wie oben ist der Beitrag von $p = 2$ durch $b_2 m_{\ell+1}$ gegeben. Wir müssen somit nur noch zeigen, dass der Grad jedes Monoms des Polynoms

$$\left(\frac{r}{2}\right)^q j(r)^s (m_{\ell+1} r^{\ell+1})^{p-q-s} = \left(\frac{r}{2}\right)^q \left(-\frac{b_3}{8b_2} r^2 + \sum_{\substack{j=4 \\ j \text{ gerade}}}^{\ell} m_j r^j\right)^s (m_{\ell+1} r^{\ell+1})^{p-q-s}$$

niemals $\ell + 2$ sein kann. Wir zeigen dies mit Widerspruch. Wir nehmen an, dass der Grad eines Monoms des letzten Polynoms $\ell + 2$ ist. Demnach existiert ein $n \in \{2s, 4s, 6s, \dots, \ell \cdot s\}$,

so dass dieser Grad die Gleichung

$$q + n \cdot s + (\ell + 1)(p - q - s) = \ell + 2 \quad (4.15)$$

erfüllt. Offensichtlich gilt dann $p - q - s \in \{0, 1\}$. Für $p - q - s = 0$ ist die linke Seite in (4.15) ungerade. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $\ell + 2$ gerade ist. Weiterhin ergibt sich für $p - q - s = 1$ die zu (4.15) äquivalente Gleichung

$$q + n \cdot s = 1.$$

Damit folgt per Voraussetzung, dass $n = 0$ und $q = 1$ gilt und somit $s = 0$ und $p = 2$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $p \geq 3$. \square

Mit der Taylorentwicklung von i in $0+$ können wir nun die in (4.12) angegebene Fläche berechnen, die uns im nächsten Satz eine Taylorentwicklung von γ_K in $0+$ liefern wird.

Satz 4.5. *Es sei $K \in \mathcal{K}_+^k$ mit $k \geq 2$ und $d = 2$ gegeben. Dann ist für gewisse Konstanten $a_{2,\ell}(u)$, $\ell \in \{3, \dots, k+1\}$ ungerade, die Taylorentwicklung der Ordnung $k+1$ von γ_K in $0+$ durch*

$$\gamma_K(ru) = V_2(K) - V_1(K|u^\perp)r + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^{k+1} a_{2,\ell}(u)r^\ell + o(r^{k+1}), \quad r \rightarrow 0+,$$

für alle $u \in \mathcal{S}^1$ gegeben. Insbesondere erhält man für alle $u \in \mathcal{S}^1$

$$a_{2,3}(u) = \frac{1}{24} \left(k_1(x(u^\perp)) + k_1(x(-u^\perp)) \right) > 0.$$

Beweis. Wir wählen ein $u \in \mathcal{S}^1$. Unter den obigen Voraussetzungen kann ∂K in $x(\pm u^\perp)$ durch eine strikt konvexe Funktion $f_{x(\pm u^\perp)}$ wie in (4.10) approximiert werden. Wir beschränken uns lediglich auf den Fall $x(u^\perp)$, aber die Rechnungen bleiben für $x(-u^\perp)$ gültig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $x(u^\perp)$ der Ursprung. Es gilt

$$\int_0^{i(r)} f_{x(u^\perp)}(y) \, dy + \int_{i(r)}^r f_{x(u^\perp)}(y-r) \, dy$$

zu berechnen. Dank Lemma 4.4 wird eine asymptotische Entwicklung von i in $0+$ beschrieben durch

$$i(r) = \frac{r}{2} + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ gerade}}}^{k-1} m_j r^j + \mathcal{O}(r^k), \quad r \rightarrow 0+,$$

wobei insbesondere $m_2 = -\frac{b_3}{8b_2}$ gilt. Dies liefert uns

$$\begin{aligned}
& \int_0^{i(r)} f_{x(u^\perp)}(y) \, dy + \int_{i(r)}^r f_{x(u^\perp)}(y-r) \, dy \\
&= \int_0^{\frac{r}{2} + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ gerade}}}^{k-1} m_j r^j} f_{x(u^\perp)}(y) \, dy + \int_{\frac{r}{2} + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ gerade}}}^{k-1} m_j r^j}^r f_{x(u^\perp)}(y-r) \, dy \\
&= \sum_{p=2}^k \frac{b_p}{p+1} \left[\left(\frac{r}{2} + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ gerade}}}^{k-1} m_j r^j \right)^{p+1} - \left(\sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ gerade}}}^{k-1} m_j r^j - \frac{r}{2} \right)^{p+1} \right] + o(r^{k+1}) \\
&= 2 \sum_{p=2}^k \frac{b_p}{p+1} \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ ungerade}}}^{p+1} \binom{p+1}{q} \left(\frac{r}{2} \right)^q \left(\sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ gerade}}}^{k-1} m_j r^j \right)^{p+1-q} + o(r^{k+1}) \\
&= \sum_{\substack{p=3 \\ p \text{ ungerade}}}^{k+1} \tilde{a}_p(x(u^\perp)) r^p + o(r^{k+1}), \quad r \rightarrow 0+,
\end{aligned}$$

für gewisse Konstanten $\tilde{a}_p(x(u^\perp))$, $p \in \{3, \dots, k+1\}$ ungerade. Die Konstante $\tilde{a}_3(x(u^\perp))$ ist für eine geeignete Wahl des Koordinatensystems durch

$$\tilde{a}_3(x(u^\perp)) = \frac{1}{24} k_1(x(u^\perp))$$

gegeben. Man zeigt nun eine entsprechende Reihendarstellung für $x(-u^\perp)$ und setzt

$$a_{2,p}(u) := \tilde{a}_p(x(u^\perp)) + \tilde{a}_p(x(-u^\perp))$$

für alle ungeraden $p \in \{3, \dots, k+1\}$. Dies liefert mit (4.8) die Behauptung. \square

Bemerkung 4.6. Die Taylorentwicklung aus Satz 4.5 korrigiert die aus [9, Remark 2.2 b)]. Weiterhin liefert unsere Methode eine bessere asymptotische Entwicklung als die in [9] und [54] vorgestellten Entwicklungen.

Bemerkung 4.7. Man kann sogar den Koeffizienten $a_{2,5}(u)$ mittels der von $x(\pm u^\perp)$ abhängigen Konstanten $b_2(x(\pm u^\perp))$, $b_3(x(\pm u^\perp))$, $b_4(x(\pm u^\perp))$ aus der asymptotischen Entwicklung in (4.10) gewinnen. Eine einfache Rechnung mit Maple führt zu

$$a_{2,5}(u) = \frac{b_4(x(u^\perp)) + b_4(x(-u^\perp))}{80} - \frac{b_3(x(u^\perp))}{64b_2(x(u^\perp))} - \frac{b_3(x(-u^\perp))}{64b_2(x(-u^\perp))}.$$

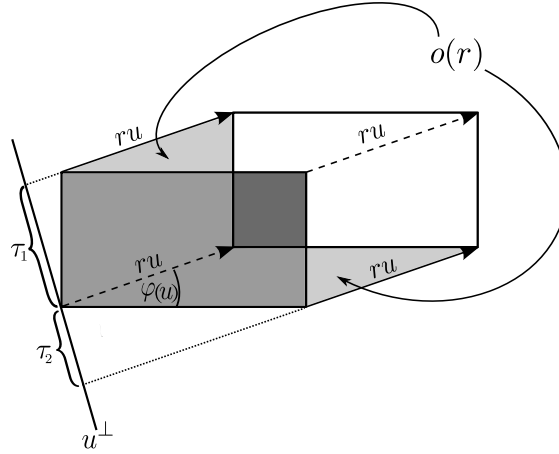


Abbildung 4.2: Das Kovariogramm eines Rechteckes in Richtung u .

In Satz 4.5 haben wir gefordert, dass $K \in \mathcal{K}_+^k$ für $k \geq 2$ gilt. Verzichten wir nun auf die Voraussetzungen, dass $K \in \hat{\mathcal{K}}^2$ keinen 2-mal stetig differenzierbaren Rand und keine strikt positiven Hauptkrümmungen besitzt, so erwarten wir, dass das Kovariogramm γ_K eine andere Darstellung als die aus Satz 4.5 vorweist. Zumindest macht das folgende Beispiel deutlich, dass das eindimensionale Kovariogramm eines Rechteckes einen quadratischen Anteil enthält.

Beispiel 4.8. Sei K ein Rechteck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) , $(0, b)$ für $a, b > 0$. Wegen (4.8) bekommen wir vorab die asymptotische Entwicklung

$$\gamma_K(ru) = ab - (\tau_1 + \tau_2)r + o(r), \quad r \rightarrow 0+,$$

wobei τ_1 und τ_2 die orthogonalen Projektionen der Kanten des Rechteckes auf den Unterraum u^\perp beschreiben, siehe Abbildung 4.2. Für τ_1 ergibt sich der Wert

$$\tau_1 = b \cos(\varphi(u))$$

und für τ_2 hingegen der Wert

$$\tau_2 = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi(u)\right) = a \sin(\pi - \varphi(u)) = -a \sin(-\varphi(u)) = a \sin(\varphi(u)).$$

Dabei ist $\varphi(u) \in [0, 2\pi)$ der durch u eindeutig bestimmte Winkel mit der Abszisse. Wir müssen wie oben die in leicht grau gefärbten Dreiecksflächen berechnen. Eine leichte Rechnung mithilfe der Abbildung 4.2 liefert für eine Dreiecksfläche den Wert

$$\frac{1}{2} \cos(\varphi(u)) \sin(\varphi(u)) r^2$$

und damit erhalten wir

$$\gamma_K(ru) = ab - (a \sin(\varphi(u)) + b \cos(\varphi(u)))r + \cos(\varphi(u)) \sin(\varphi(u))r^2, \quad r \leq \min(a, b),$$

für alle $u \in \mathcal{S}^1$. Wir stellen hier fest, dass der letzte Ordnungsterm quadratisch und nicht kubisch wie in Satz 4.5 ist.

Wir möchten jetzt den Satz 4.5 auf beliebige Dimensionen $d \geq 3$ erweitern. Dafür definieren wir die Menge $P(u) := \{x \in \partial K : n(x)^T u = 0\}$ und bezeichnen hier mit \mathbb{H}^{d-2} das $(d-2)$ -dimensionale Hausdorff-Maß auf $P(u)$, wobei $n(x)$ der äußere Normaleneinheitsvektor im Punkt $x \in \partial K$. Weiterhin parametrisieren wir den Tangentialraum von K im Punkt $x \in P(u)$ unter Verwendung von sphärischen Koordinaten mit $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{S}^{d-2}(x)$, wobei $\mathcal{S}^{d-2}(x)$ die $(d-2)$ -dimensionale Einheitskugel mit Mittelpunkt x im Tangentialraum identifiziert. Überdies definiert $(s, v(u, x)) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{S}^{d-2}(x)$ den eindeutig bestimmten Punkt mit der Eigenschaft $sv(u, x) = u$.

Satz 4.9. *Es sei $K \in \mathcal{K}_+^k$ mit $k \geq 3$ und $d \geq 3$ gegeben. Dann ergibt sich für gewisse Konstanten $a_{d,\ell}(u)$, $\ell \in \{3, \dots, k\}$ ungerade, eine asymptotische Entwicklung von γ_K in $0+$ mittels*

$$\gamma_K(ru) = V_d(K) - V_{d-1}(K|u^\perp)r + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k a_{d,\ell}(u)r^\ell + \mathcal{O}(r^{k+1}), \quad r \rightarrow 0+,$$

für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$. Für die Konstante $a_{d,3}(u)$ gilt insbesondere

$$a_{d,3}(u) = \frac{1}{24} \sum_{\ell=1}^{d-1} \int_{P(u)} k_\ell(x) (v(u, x)^T e_\ell)^2 d\mathbb{H}^{d-2}(x) > 0, \quad u \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

Beweis. Wir geben uns ein $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ mit $x \in P(u)$ beliebig vor. Unter den obigen Voraussetzungen sind wir in der Lage, (4.9) wie folgt anzuwenden:

Wir betrachten dazu $v(u, x) \in \mathcal{S}^{d-2}(x)$ wie oben. Zusätzlich beschreibt $(y, f_x(yv(u, x)))$ die Raumkurve, welche den Rand ∂K im Punkt x in Richtung $v(u, x)$ approximiert. Diese ist gegeben durch

$$f_x(yv(u, x)) = b_2(v(u, x))y^2 + b_3(v(u, x))y^3 + \dots + b_{k-1}(v(u, x))y^{k-1} + \mathcal{O}(y^k), \quad y \rightarrow 0+,$$

wobei $b_2(v(u, x))$ ohne Einschränkung wie in (4.11) definiert ist. Dabei wird der Fehlerterm $\mathcal{O}(y^k)$ unabhängig von x und $v(u, x)$ gewählt. Die Fläche $A(r, v(u, x))$ zwischen den Raumkurven $(y, f_x(yv(u, x)))$ und $(y, f_x((y-r)v(u, x)))$ approximiert die Fläche K und $K \oplus \{ru\}$ in Richtung $v(u, x)$ und lässt sich mit der gleichen Argumentation wie im Beweis

von Satz 4.5 anhand von

$$\begin{aligned} A(r, v(u, x)) &= \int_0^{i(r)} f_x(yv(u, x)) dy + \int_{i(r)}^r f_x((y-r)v(u, x)) dy \\ &= \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k \tilde{a}_\ell(x) r^\ell + \mathcal{O}(r^{k+1}), \quad r \rightarrow 0+, \end{aligned}$$

für gewisse Konstanten $\tilde{a}_\ell(x)$, $\ell \in \{3, \dots, k\}$ ungerade, angeben. Die Integration über x liefert

$$a_{d,\ell}(u) := \int_{P(u)} \tilde{a}_\ell(x) d\mathbb{H}^{d-2}(x)$$

für alle ungeraden $\ell \in \{3, \dots, k\}$ und es gilt $a_{d,3}(u) > 0$. Damit folgt insgesamt die Behauptung. \square

Bemerkung 4.10. *Wir haben gesehen, dass der Beweis von Satz 4.9 auf ein zweidimensionales Problem reduziert wurde, indem sozusagen das Kovariogramm einer zweidimensionalen Menge $K' \in \mathcal{K}_+^k$, $k \geq 3$, untersucht werden musste. Deshalb sind die gemachten Voraussetzungen in diesem Satz aufgrund des Beispiels 4.8 genauso wesentlich wie im Satz 4.5. Weiterhin kann der Satz 4.9 insofern ausgedehnt werden, dass der Fall $d = 2$ unter der stärkeren Voraussetzung $K \in \mathcal{K}_+^k$, $k \geq 3$, ebenfalls abgedeckt werden kann.*

Bemerkung 4.11. *Mithilfe anderer Techniken kann man ebenfalls das dritte Taylorpolynom von γ_K in $0+$ erhalten und zeigen, dass der 2. Ordnungsterm verschwinden muss, vgl. dazu [54, Theorem 3].*

Im weiteren Verlauf bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(K)$ die Oberfläche von K . Für $d = 2$ soll dies gerade der Umfang von K sein. Mithilfe der Kubota-Formel aus Lemma 2.7 erhalten wir nun eine asymptotische Entwicklung von $\bar{\gamma}_K$ in $0+$.

Korollar 4.12. *Es sei $K \in \mathcal{K}_+^k$ mit $k \geq 3$ und $d \geq 2$ gegeben. Dann erfüllt die isotropierte Mengen-Kovarianzfunktion von K die asymptotische Entwicklung*

$$\bar{\gamma}_K(r) = V_d(K) - \frac{\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \mathcal{S}(K)r + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k \hat{a}_{d,\ell}(K) r^\ell + \mathcal{O}(r^{k+1}), \quad r \rightarrow 0+, \quad (4.16)$$

mit

$$\hat{a}_{d,\ell}(K) := \int_{\mathcal{S}^{d-1}} a_{d,\ell}(u) d\nu_{d-1}(u)$$

für alle ungeraden $\ell \in \{3, \dots, k\}$, wobei $a_{d,\ell}(u)$, $\ell \in \{3, \dots, k\}$ ungerade, aus Satz 4.5 bzw. Satz 4.9 stammen. Vor allem gilt $\hat{a}_{d,3}(K) > 0$ und

$$\hat{a}_{2,3}(K) = \frac{1}{12} \int_{\mathcal{S}^1} k_1(x(u)) d\nu_1(u).$$

Beweis. Da der Fehlerterm in (4.9) unabhängig von x und v ist, muss er auch unabhängig von u sein. Damit führt uns Satz 4.5 für $d = 2$ bzw. Satz 4.9 für $d \geq 3$ in Kombination mit der Kubota-Formel aus Lemma 2.7 zu

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_K(r) &= \int_{S^{d-1}} V_d(K) - V_{d-1}(K|u^\perp) r + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k a_{d,\ell}(u) r^\ell d\nu_{d-1}(u) + \mathcal{O}(r^{k+1}) \\
&= V_d(K) - r \int_{S^{d-1}} V_{d-1}(K|u^\perp) d\nu_{d-1}(u) + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k r^\ell \int_{S^{d-1}} a_{d,\ell}(u) d\nu_{d-1}(u) + \mathcal{O}(r^{k+1}) \\
&= V_d(K) - \frac{\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \mathcal{S}(K) r + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k \hat{a}_{d,\ell}(K) r^\ell + \mathcal{O}(r^{k+1}), \quad r \rightarrow 0+.
\end{aligned}$$

Falls $d = 2$ gilt, erhalten wir für die Konstante $\hat{a}_{2,3}(K)$ den Wert

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{2,3}(K) &= \int_{S^1} a_{2,3}(u) d\nu_1(u) = \frac{1}{24} \int_{S^1} k_1(x(u^\perp)) + k_1(x(-u^\perp)) d\nu_1(u) \\
&= \frac{1}{24} \left(\int_{S^1} k_1(x(u^\perp)) d\nu_1(u) + \int_{S^1} k_1(x(-u^\perp)) d\nu_1(u) \right) = \frac{1}{12} \int_{S^1} k_1(x(u)) d\nu_1(u).
\end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung. □

4.2 Anwendungen auf Modelle der Stochastischen Geometrie

Wir interessieren uns nun für Modelle aus der Stochastischen Geometrie, in der eine asymptotische Entwicklung des Kovariogrammes von $K \in \mathcal{K}_+^k$, $k \geq 3$, nützlich sein wird. Die Beispiele, die wir uns anschauen werden, sind Gilbert Graphen, Poisson-Voronoi Approximationen, Boolesche Modelle und lokale STIT Mosaike.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(f)$ eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{g(y)}{f(y)} \in \mathbb{R}$ für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt.

4.2.1 Anwendung auf Gilbert Graphen

Wir betrachten für $d \geq 2$ einen homogenen Poissonschen Punktprozess η_λ in $K \in \mathcal{K}^d$ mit konstanter Intensität $\lambda > 0$, d.h. einen homogenen Poissonschen Punktprozess in \mathbb{R}^d mit konstanter Intensität λ , der auf die Menge K eingeschränkt wird. Zudem staten wir K mit der Spur- σ -Algebra $\mathcal{B}(K)$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ über K aus und wählen eine Familie $(\delta_\lambda)_{\lambda > 0}$ von

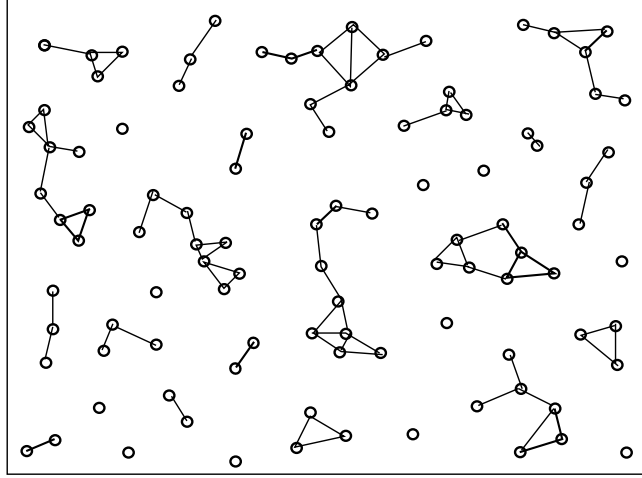


Abbildung 4.3: Realisierung eines Gilbert Graphen $G(\eta_\lambda, \delta_\lambda)$.

positiven reellen Zahlen, so dass $\delta_\lambda \rightarrow 0$ für $\lambda \rightarrow \infty$ gilt. Falls wir die Punkte von η_λ als Knoten auffassen und zwei Knoten genau dann mit einer Kante verbinden, falls

$$0 < \|x - y\| \leq \delta_\lambda,$$

dann heißt der so entstandene Graph $G(\eta_\lambda, \delta_\lambda)$ Gilbert Graph. Eine Realisierung eines Gilbert Graphen ist vermöge der Abbildung 4.3 gegeben. Wir geben uns einen Gilbert Graphen $G(\eta_\lambda, \delta_\lambda)$ vor. Dann sind wir an dem Längenfunktional $L_\lambda^{(\alpha)}$ interessiert, welches durch

$$L_\lambda^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \eta_{\lambda,\neq}^2} \mathbb{1}_{\{\|x-y\| \leq \delta_\lambda\}} \|x - y\|^\alpha$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert ist. Dabei enthält die Menge $\eta_{\lambda,\neq}^2$ alle Punktepaaire von η_λ^2 , deren Komponenten nicht übereinstimmen. Offensichtlich repräsentiert der Fall $\alpha = 0$ die Anzahl der Kanten und der Fall $\alpha = 1$ die Gesamtkantenlänge von $G(\eta_\lambda, \delta_\lambda)$. Unter Verwendung der Slivnyak-Mecke-Formel und mithilfe von sphärischen Koordinaten ist der Erwartungswert $L_\lambda^{(\alpha)}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_\lambda^{(\alpha)}] &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(x) \mathbb{1}_K(y) \mathbb{1}_{\{\|x-y\| \leq \delta_\lambda\}} \|x - y\|^\alpha dx dy \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{B_{\delta_\lambda}^d(\mathbf{0})} \|y\|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(x) \mathbb{1}_K(x - y) dx dy \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{B_{\delta_\lambda}^d(\mathbf{0})} \|y\|^\alpha \gamma_K(y) dy \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d\kappa_d}{2} \lambda^2 \int_0^{\delta_\lambda} r^{\alpha+d-1} \int_{S^{d-1}} \gamma_K(ru) \, d\nu_{d-1}(u) \, dr \\
&= \frac{d\kappa_d}{2} \lambda^2 \int_0^{\delta_\lambda} r^{\alpha+d-1} \bar{\gamma}_K(r) \, dr.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Da $\delta_\lambda \rightarrow 0$ für $\lambda \rightarrow \infty$ gilt, konvergiert das letzte Integral nach dem Satz von der majorierten Konvergenz auch gegen 0. Unter der Voraussetzung, dass $K \in \mathcal{K}_+^k$ für $k \geq 3$ gilt, können wir Folgendes festhalten.

Satz 4.13. *Es sei $K \in \mathcal{K}_+^k$ mit $k \geq 3$ gegeben. Dann erhält man für den Erwartungswert $\mathbb{E}[L_\lambda^{(\alpha)}]$ von $L_\lambda^{(\alpha)}$ die asymptotische Entwicklung*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_\lambda^{(\alpha)}] &= \frac{\lambda^2}{2} \left[\frac{d\kappa_d V_d(K)}{\alpha+d} \delta_\lambda^{\alpha+d} - \frac{\kappa_{d-1} \mathcal{S}(K)}{\alpha+d+1} \delta_\lambda^{\alpha+d+1} + d\kappa_d \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k \frac{\hat{a}_{d,\ell}(K)}{\alpha+d+\ell} \delta_\lambda^{\alpha+d+\ell} \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(\lambda^2 \delta_\lambda^{\alpha+d+k+1}), \quad \lambda \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten $\hat{a}_{d,\ell}(K)$, $\ell \in \{3, \dots, k\}$ ungerade, wie in Korollar 4.12 definiert sind.

Beweis. Wir wenden Korollar 4.12 auf die isotropierte Mengen-Kovarianzfunktion in (4.17) an und integrieren schließlich über r . Dies liefert für den ersten Ordnungsterm der asymptotischen Entwicklung von $\mathbb{E}[L_\lambda^{(\alpha)}]$

$$\frac{d\kappa_d}{2} \lambda^2 \int_0^{\delta_\lambda} V_d(K) r^{\alpha+d-1} \, dr = \frac{\lambda^2 \delta_\lambda^{\alpha+d}}{2} \frac{d\kappa_d V_d(K)}{\alpha+d}$$

und für den zweiten Ordnungsterm unter Beachtung der Kubota-Formel

$$-\frac{d\kappa_d}{2} \lambda^2 \int_0^{\delta_\lambda} \frac{\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \mathcal{S}(K) r^{\alpha+d} \, dr = -\frac{\lambda^2 \delta_\lambda^{\alpha+d+1}}{2} \frac{\kappa_{d-1} \mathcal{S}(K)}{\alpha+d+1}.$$

Zusätzlich sind die restlichen Ordnungsterme durch

$$\frac{d\kappa_d}{2} \lambda^2 \int_0^{\delta_\lambda} \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k \hat{a}_{d,\ell}(K) r^{\alpha+d+\ell-1} \, dr = \frac{\lambda^2}{2} \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k \frac{d\kappa_d \hat{a}_{d,\ell}(K)}{\alpha+d+\ell} \delta_\lambda^{\alpha+d+\ell}$$

gegeben. Dies ergibt insgesamt die Behauptung. \square

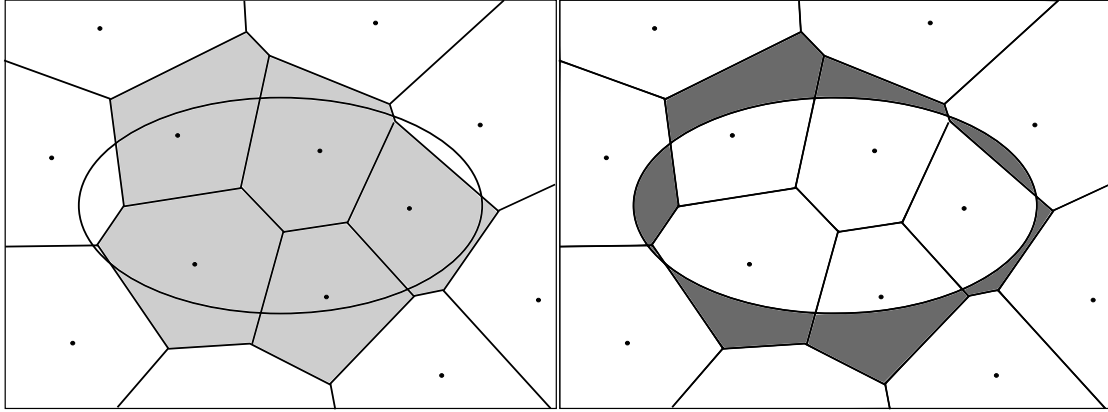


Abbildung 4.4: Die Poisson-Voronoi Approximation einer Ellipse im leichten Grauton und die passende symmetrische Differenz im dunklen Grauton.

Aus diesem Satz können wir für alle $K \in \mathcal{K}_+^3$ einen asymptotisch erwartungstreuen Schätzer für die Oberfläche $\mathcal{S}(K)$ von K ableiten. Dazu wählen wir für $\lambda > 0$ den Schätzer

$$T_\lambda = \frac{\frac{d\kappa_d V_d(K)}{2(\alpha+d)} \delta_\lambda^{\alpha+d} - \lambda^{-2} L_\lambda^{(\alpha)}}{\frac{\kappa_{d-1}}{2(\alpha+d+1)} \delta_\lambda^{\alpha+d+1}}. \quad (4.19)$$

Überdies kann sogar eine Konvergenzrate für die asymptotische Erwartungstreue angegeben werden.

Korollar 4.14. *Falls $K \in \mathcal{K}_+^3$ gilt, dann ist der Schätzer T_λ ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für die Oberfläche $\mathcal{S}(K)$ mit Konvergenzrate δ_λ^2 .*

Beweis. Der Satz 4.13 besagt, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[T_\lambda]$ von T_λ die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_\lambda - \mathcal{S}(K)] &= \frac{d(\alpha+d+1)\kappa_d V_d(K)}{(\alpha+d)\kappa_{d-1}} \delta_\lambda^{-1} - \mathcal{S}(K) - \frac{2(\alpha+d+1)}{\kappa_{d-1}} \delta_\lambda^{-(\alpha+d+1)} \lambda^{-2} \mathbb{E}[L_\lambda^{(\alpha)}] \\ &= -\frac{d(\alpha+d+1)\kappa_d \hat{a}_{d,3}(K)}{(\alpha+d+3)\kappa_{d-1}} \delta_\lambda^2 + \mathcal{O}(\delta_\lambda^3), \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

erfüllt. Wegen $K \in \mathcal{K}_+^3$ gilt $\hat{a}_{d,3}(K) > 0$. Daher ist nach Voraussetzung δ_λ^2 die gewünschte Konvergenzrate für die asymptotische Erwartungstreue. \square

4.2.2 Anwendung auf Poisson-Voronoi Approximationen

Wir geben uns einen homogenen Poissonschen Punktprozess η_λ in \mathbb{R}^d mit konstanter Intensität $\lambda > 0$ vor und bezeichnen mit

$$\nu_{\eta_\lambda}(x) := \{z \in \mathbb{R}^d : \|z - x\| \leq \|z - y\| \text{ für alle } y \in \eta_\lambda\}$$

die Poisson-Voronoi Zelle, die durch η_λ mit Kern $x \in \eta_\lambda$ generiert wird. Die Poisson-Voronoi Zelle $\nu_{\eta_\lambda}(x)$ besteht aus den Punkten in \mathbb{R}^d , die näher an $x \in \eta_\lambda$ als an allen anderen Punkten $y \in \eta_\lambda$ mit $x \neq y$ liegen. Dann ist die Poisson-Voronoi Approximation K_{η_λ} von $K \subset \mathbb{R}^d$ mit $V_d(K) < \infty$ durch

$$K_{\eta_\lambda} = \bigcup_{x \in \eta_\lambda \cap K} \nu_{\eta_\lambda}(x)$$

gegeben. Für ein besseres Verständnis stellt die Abbildung 4.4 die Poisson-Voronoi Approximation einer Ellipse dar. Die Poisson-Voronoi Approximation wurde zum ersten Mal in [33] für den Fall $d = 1$ eingeführt. Weiterhin wurde dort gezeigt, dass die Länge $V_1(K_{\eta_\lambda})$ von K_{η_λ} fast sicher gegen die Länge von K für alle beschränkten Borelmengen K konvergiert. Für höhere Dimensionen $d \geq 2$ konnte diese Aussage in [18] nur unter bestimmten Annahmen an den Rand ∂K von K aufrecht erhalten werden. Eine Verallgemeinerung dieser Aussage auf allgemeine beschränkte Borelmengen K wurde in [53] verifiziert. Insbesondere kann für Borelmengen K mit $V_d(K) < \infty$ gezeigt werden, dass $V_d(K_{\eta_\lambda})$ ein erwartungstreuer Schätzer für $V_d(K)$ ist.

Lemma 4.15. *Es gilt für alle $K \subset \mathbb{R}^d$ mit $V_d(K) < \infty$*

$$\mathbb{E}[V_d(K_{\eta_\lambda})] = V_d(K).$$

Beweis. Mithilfe des Satzes von Fubini und der Slivnyak-Mecke-Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_d(K_{\eta_\lambda})] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{y \in K_{\eta_\lambda}\}} dy\right] = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{y \in K_{\eta_\lambda}\}}] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\sum_{x \in \eta_\lambda \cap K} \mathbb{1}_{\{y \in \nu_{\eta_\lambda}(x)\}}\right] dy = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_K \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{y \in \nu_{\eta_\lambda \cup \{x\}}(x)\}}] dx dy \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_K \mathbb{P}(y \in \nu_{\eta_\lambda \cup \{x\}}(x)) dx dy = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_K \mathbb{P}(\eta_\lambda \cap B_{\|x-y\|}^d(y) = \emptyset) dx dy \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_K \mathbb{P}(\eta_\lambda(B_{\|x-y\|}^d(y)) = \emptyset) dx dy = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_K e^{-\lambda \kappa_d \|x-y\|^d} dx dy \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_K e^{-\lambda \kappa_d \|y\|^d} dx dy = \lambda V_d(K) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda \kappa_d \|y\|^d} dy. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun sphärische Koordinaten, so ergibt sich

$$\lambda V_d(K) d\kappa_d \int_0^\infty e^{-\lambda \kappa_d r^d} r^{d-1} dr = V_d(K)$$

für alle $K \subset \mathbb{R}^d$ mit $V_d(K) < \infty$. □

Die ersten beiden Momente und die Varianz von $V_d(K_{\eta_\lambda})$ wurden in [26] untersucht. Dort konnte auch eine obere Schranke für die Varianz von $V_d(K_{\eta_\lambda})$ gefunden werden, eine untere Schranke wurde in [68] hergeleitet. Ebenfalls konnte ein zentraler Grenzwertsatz für $V_d(K_{\eta_\lambda})$ in [68] gezeigt werden.

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der symmetrischen Differenz

$$K \Delta K_{\eta_\lambda} := (K \setminus K_{\eta_\lambda}) \cup (K_{\eta_\lambda} \setminus K)$$

von K und K_{η_λ} , siehe Abbildung 4.4 für eine Veranschaulichung. Vielmehr interessieren wir uns für ihr Volumen, welches analog zum Beweis von Lemma 4.15 durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_d(K \Delta K_{\eta_\lambda})] &= \mathbb{E}[V_d(K \setminus K_{\eta_\lambda})] + \mathbb{E}[V_d(K_{\eta_\lambda} \setminus K)] \\ &= \lambda \int_K \int_{\mathbb{R}^d \setminus K} e^{-\lambda \kappa_d \|x-y\|^d} dx dy + \lambda \int_{\mathbb{R}^d \setminus K} \int_K e^{-\lambda \kappa_d \|x-y\|^d} dx dy \\ &= 2\lambda \int_{K^c} \int_K e^{-\lambda \kappa_d \|x-y\|^d} dx dy \end{aligned}$$

mit $K^c := \mathbb{R}^d \setminus K$ dargestellt werden kann. Wenden wir auf das letzte Integral wiederum sphärische Koordinaten an, so erreichen wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_d(K \Delta K_{\eta_\lambda})] &= 2\lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(x) \mathbb{1}_{K^c}(y) e^{-\lambda \kappa_d \|x-y\|^d} dx dy \\ &= 2\lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(x) \mathbb{1}_{K^c}(x-y) e^{-\lambda \kappa_d \|y\|^d} dx dy \\ &= 2\lambda \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda \kappa_d \|y\|^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(x) (1 - \mathbb{1}_{K \oplus \{y\}}(x)) dx dy \\ &= 2\lambda \int_{\mathbb{R}^d} (\gamma_K(0) - \gamma_K(y)) e^{-\lambda \kappa_d \|y\|^d} dy \\ &= 2d\kappa_d \lambda \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^{d-1}} (\gamma_K(0) - \gamma_K(ru)) e^{-\lambda \kappa_d r^d} r^{d-1} d\nu_{d-1}(u) dr \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \tilde{\gamma}_K(((\kappa_d \lambda)^{-1} r)^{\frac{1}{d}} u) e^{-r} d\nu_{d-1}(u) dr \end{aligned} \tag{4.20}$$

mit $\tilde{\gamma}_K(ru) := \gamma_K(0) - \gamma_K(ru)$. Für den Rest des Unterabschnittes sei wieder $K \in \mathcal{K}_+^k$ mit $k \geq 3$ und $d \geq 2$ vorausgesetzt.

Satz 4.16. Für $K \in \mathcal{K}_+^k$ besitzt der Erwartungswert $\mathbb{E}[V_d(K \Delta K_{\eta_\lambda})]$ die asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_d(K \Delta K_{\eta_\lambda})] &= \frac{2\kappa_{d-1}\mathcal{S}(K)}{d\kappa_d^{1+\frac{1}{d}}}\Gamma\left(1+\frac{1}{d}\right)\lambda^{-\frac{1}{d}} - 2 \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k \frac{\hat{a}_{d,\ell}(K)}{\kappa_d^{\frac{\ell}{d}}}\Gamma\left(1+\frac{\ell}{d}\right)\lambda^{-\frac{\ell}{d}} \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{k+1}{d}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

mit den Konstanten $\hat{a}_{d,\ell}(K)$, $\ell \in \{3, \dots, k\}$ ungerade, aus Korollar 4.12.

Beweis. Offensichtlich konvergiert (4.20) unter Beachtung des Satzes von der monotonen Konvergenz und der Stetigkeit von γ_K gegen 0. Daher dürfen wir Limes und Integration vertauschen und die Taylorentwicklung von γ_K in $0+$ auf (4.20) anwenden. Dies liefert die asymptotische Entwicklung von $\tilde{\gamma}_K$ in der Form

$$\begin{aligned} &\tilde{\gamma}_K\left(\left((\kappa_d\lambda)^{-1}r\right)^{\frac{1}{d}}u\right) \\ &= V_{d-1}(K|u^\perp)\left(\left(\kappa_d\lambda\right)^{-1}r\right)^{\frac{1}{d}} - \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k a_{d,\ell}(u)\left(\left(\kappa_d\lambda\right)^{-1}r\right)^{\frac{\ell}{d}} + \mathcal{O}\left(\left(r\lambda\right)^{-\frac{k+1}{d}}\right) \\ &= \lambda^{-\frac{1}{d}}\frac{V_{d-1}(K|u^\perp)}{\kappa_d^{\frac{1}{d}}}r^{\frac{1}{d}} - \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k \lambda^{-\frac{\ell}{d}}\frac{a_{d,\ell}(u)}{\kappa_d^{\frac{\ell}{d}}}r^{\frac{\ell}{d}} + \mathcal{O}\left(\left(r\lambda\right)^{-\frac{k+1}{d}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Gemäß Korollar 4.12 ergibt die Integration über \mathcal{S}^{d-1} für den ersten Ordnungsterm von $\mathbb{E}[V_d(K \Delta K_{\eta_\lambda})]$

$$\lambda^{-\frac{1}{d}}\frac{2\kappa_{d-1}\mathcal{S}(K)}{d\kappa_d^{1+\frac{1}{d}}}\int_0^\infty r^{\frac{1}{d}}e^{-r}dr = \lambda^{-\frac{1}{d}}\frac{2\kappa_{d-1}\mathcal{S}(K)}{d\kappa_d^{1+\frac{1}{d}}}\Gamma\left(1+\frac{1}{d}\right)$$

und für den Rest

$$-2 \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k \lambda^{-\frac{\ell}{d}}\frac{\hat{a}_{d,\ell}(K)}{\kappa_d^{\frac{\ell}{d}}}\Gamma\left(1+\frac{\ell}{d}\right).$$

Dies vervollständigt den Beweis. \square

Bemerkung 4.17. Für allgemeinere Mengen K ist der erste Ordnungsterm auch anhand von [57, Theorem 2.1] durch die Taylorentwicklung von γ_K aus [21] gegeben.

Ähnlich wie in Unterabschnitt 4.2.1 können wir mithilfe der Poisson-Voronoi Approximation auch einen asymptotisch erwartungstreuen Schätzer für die Oberfläche $\mathcal{S}(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}_+^3$ gewinnen. Dazu definieren wir für $\lambda > 0$ den Schätzer

$$T'_\lambda = \frac{d\kappa_d^{1+\frac{1}{d}}}{2\kappa_{d-1}\Gamma\left(1+\frac{1}{d}\right)}\lambda^{\frac{1}{d}}V_d(K \Delta K_{\eta_\lambda}).$$

Korollar 4.18. Falls $K \in \mathcal{K}_+^3$ gilt, dann ist der Schätzer T'_λ ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für die Oberfläche $\mathcal{S}(K)$ von K mit Konvergenzrate $\lambda^{-\frac{2}{d}}$.

Beweis. Gemäß Satz 4.16 bekommen wir

$$\mathbb{E}[T'_\lambda - \mathcal{S}(K)] = -\frac{d\kappa_d^{1-\frac{2}{d}}\Gamma(1+\frac{3}{d})\hat{a}_{d,3}(K)}{\kappa_{d-1}\Gamma(1+\frac{1}{d})}\lambda^{-\frac{2}{d}} + \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{3}{d}}), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

und die gewünschte Konvergenzrate beträgt $\lambda^{-\frac{2}{d}}$. \square

Weitere Schätzer für die Oberfläche wurden in [74, 75] vorgestellt und untersucht.

4.2.3 Anwendung auf Boolesche Modelle

Für eine Menge $C \in \mathcal{C}^d$ bezeichnen wir mit $c(C)$ das Zentrum von C als denjenigen Punkt, welcher der Mittelpunkt der Kugel B mit dem kleinsten Radius ist, so dass $C \subset B$ gilt. Im Folgenden definieren wir \mathcal{K}_0^d als das Mengensystem aller konvexen Körper, die als Zentrum den Ursprung $\mathbf{0}$ besitzen, d.h.,

$$\mathcal{K}_0^d = \{K \in \mathcal{K}^d : c(K) = \mathbf{0}\}.$$

Wie im letzten Unterabschnitt betrachten wir einen homogenen Poissonschen Punktprozess η_λ in \mathbb{R}^d mit konstanter Intensität $\lambda > 0$ und markieren jeden Punkt $x \in \eta_\lambda$ unabhängig mit einem konvexen Körper Z_x , den wir zufällig gemäß einer Verteilung \mathbb{Q} auf \mathcal{K}_0^d mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathcal{K}_0^d} V_d(L \oplus C) d\mathbb{Q}(L) < \infty \quad \text{für alle } C \in \mathcal{C}^d, \quad (4.21)$$

auswählen. Dann ist das Boolesche Modell definiert durch

$$\mathcal{Z} := \bigcup_{x \in \eta_\lambda} Z_x.$$

Dabei wird \mathcal{Z} durch einen markierten Poissonschen Punktprozess mit Intensitätsmaß Λ in der Form von

$$\Lambda(F) = \lambda \int_{\mathcal{K}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{L \oplus \{x\} \in F\}} dx d\mathbb{Q}(L), \quad F \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^d),$$

konstruiert. Für mehr Details verweisen wir auf [63, Section 3-4]. Eine Realisierung eines Booleschen Modells mit Kugeln wird durch die Abbildung 4.5 deutlich gemacht.

Man kann zeigen, dass jedes Boolesche Modell eine zufällige abgeschlossene Menge in \mathbb{R}^d ist.

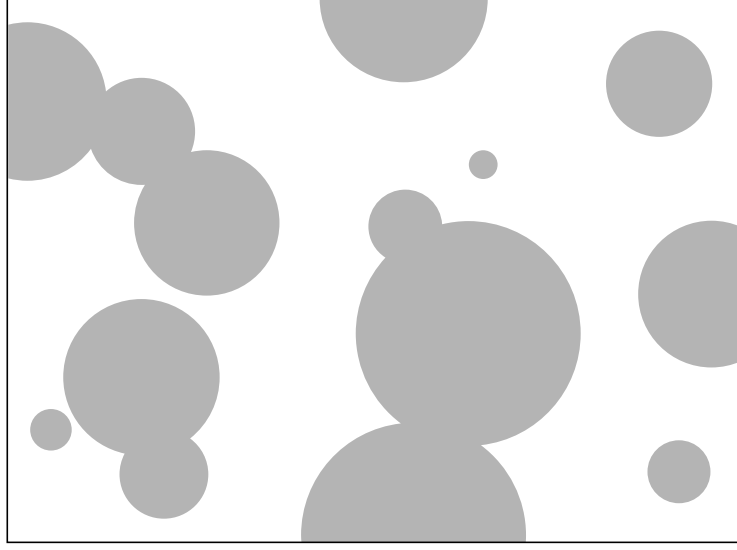


Abbildung 4.5: Realisierung eines Booleschen Modells mit Kugeln.

Satz 4.19 ([63, Theorem 3.6.2]). *Das Boolesche Modell \mathcal{Z} ist eine zufällige abgeschlossene Menge in \mathbb{R}^d .* \square

Wir führen nun das Kapazitätsfunktional $T_{\mathcal{Z}}$ von \mathcal{Z} ein. Dazu definieren wir für alle $C \in \mathcal{C}^d$ die Menge $-C := \{-c : c \in C\}$. Für $T_{\mathcal{Z}}$ gilt dann folgende Formel.

Lemma 4.20. *Das Kapazitätsfunktional $T_{\mathcal{Z}}$ erfüllt die Gleichung*

$$T_{\mathcal{Z}}(C) = \mathbb{P}(\mathcal{Z} \cap C \neq \emptyset) = 1 - \exp\left(-\lambda \int_{\mathcal{K}_0^d} V_d(L \oplus (-C)) d\mathbb{Q}(L)\right)$$

für alle $C \in \mathcal{C}^d$.

Beweis. Gemäß Definition, siehe dazu auch [63, Theorem 3.6.3], erhalten wir für $C \in \mathcal{C}^d$

$$T_{\mathcal{Z}}(C) = 1 - e^{-\Lambda(\mathcal{F}_C^d)}.$$

Dann folgt aus

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathcal{F}_C^d) &= \lambda \int_{\mathcal{K}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{L \oplus \{x\} \in \mathcal{F}_C^d\}} dx d\mathbb{Q}(L) = \lambda \int_{\mathcal{K}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{x \in C \oplus (-L)\}} dx d\mathbb{Q}(L) \\ &= \lambda \int_{\mathcal{K}_0^d} V_d(C \oplus (-L)) d\mathbb{Q}(L) = \lambda \int_{\mathcal{K}_0^d} V_d(L \oplus (-C)) d\mathbb{Q}(L) \end{aligned}$$

die Behauptung. \square

Nach Korollar 2.13 folgt wegen der Translationsinvarianz des Volumens, dass das Boolesche Modell \mathcal{Z} auch stationär ist.

Korollar 4.21. *Das Boolesche Modell \mathcal{Z} ist stationär.*

Nun sei \mathcal{Z}_0 eine Zufallsvariable mit Verteilung \mathbb{Q} gegeben, welche auch typisches Korn genannt wird. Wegen Lemma 4.20 gilt

$$\mathbb{P}(\mathbf{0} \in \mathcal{Z}) = \mathbb{P}(\mathcal{Z} \cap \{\mathbf{0}\} \neq \emptyset) = 1 - e^{-\lambda \mathbb{E}[V_d(\mathcal{Z}_0)]},$$

und wir schreiben $p = \mathbb{P}(\mathbf{0} \in \mathcal{Z})$. Das gemittelte Kovariogramm des typischen Korns ist durch

$$\gamma_{\mathcal{Z}_0}(x) := \mathbb{E}[V_d(\mathcal{Z}_0 \cap (\mathcal{Z}_0 \oplus \{x\}))], \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

definiert und ist wegen (4.21) endlich für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Deshalb liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\gamma_{\mathcal{Z}_0}(x) \rightarrow 0, \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

Überdies bezeichnen wir mit

$$\mathbb{P}(\mathbf{0} \in \mathcal{Z}, x \in \mathcal{Z})$$

die Kovarianz von \mathcal{Z} . Diese lässt sich durch $\gamma_{\mathcal{Z}_0}(x)$ und $T_{\mathcal{Z}}$ ausdrücken.

Lemma 4.22 ([70, Section 3]). *Für die Kovarianz von \mathcal{Z} ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{P}(\mathbf{0} \in \mathcal{Z}, x \in \mathcal{Z}) = p^2 + (1 - p)^2 (e^{\lambda \gamma_{\mathcal{Z}_0}(x)} - 1).$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}^d$ gelangen wir unter Verwendung der Stationarität von \mathcal{Z} zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{0} \in \mathcal{Z}, x \in \mathcal{Z}) &= 1 - (\mathbb{P}(\mathbf{0} \notin \mathcal{Z}) + \mathbb{P}(\mathbf{0} \notin \mathcal{Z} \oplus \{-x\}) - \mathbb{P}(\mathbf{0} \notin \mathcal{Z}, \mathbf{0} \notin \mathcal{Z} \oplus \{-x\})) \\ &= 1 - ((1 - p) + (1 - p) - \mathbb{P}(\mathbf{0} \notin \mathcal{Z}, x \notin \mathcal{Z})) \\ &= 2p - 1 + \mathbb{P}(\mathbf{0} \notin \mathcal{Z}, x \notin \mathcal{Z}). \end{aligned}$$

Für den letzten Summanden liefert Lemma 4.20

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{0} \notin \mathcal{Z}, x \notin \mathcal{Z}) &= \mathbb{P}(\{\mathbf{0}, x\} \notin \mathcal{Z}) = \mathbb{P}(\mathcal{Z} \cap \{\mathbf{0}, x\} = \emptyset) \\ &= \exp\left(-\lambda \int_{\kappa_0^d} V_d(L \oplus \{\mathbf{0}, x\}) d\mathbb{Q}(L)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda \int_{\kappa_0^d} V_d(L) + V_d(L \oplus \{x\}) - V_d(L \cap (L \oplus \{x\})) d\mathbb{Q}(L)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda \int_{\kappa_0^d} 2V_d(L) - V_d(L \cap (L \oplus \{x\})) d\mathbb{Q}(L)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda \int_{\kappa_0^d} V_d(L) d\mathbb{Q}(L)\right)^2 \exp(\lambda \gamma_{\mathcal{Z}_0}(x)) \\ &= (1 - p)^2 \exp(\lambda \gamma_{\mathcal{Z}_0}(x)). \end{aligned}$$

Einfaches Ausmultiplizieren impliziert die Behauptung. □

Im Folgenden setzen wir $K \in \mathcal{K}^d$ mit $d \geq 2$ und $K_R = R \cdot K$, $R > 0$. Wir interessieren uns nun für das Volumen $V_d(\mathcal{Z} \cap K_R)$ von \mathcal{Z} in einem Beobachtungsfenster K_R . Insbesondere möchten wir sein asymptotisches Verhalten für $R \rightarrow \infty$ untersuchen. Der Satz von Fubini führt unter Berücksichtigung der Stationarität von \mathcal{Z} zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_d(\mathcal{Z} \cap K_R)^2] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathcal{Z}}(x) \mathbb{1}_{K_R}(x) dx \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathcal{Z}}(y) \mathbb{1}_{K_R}(y) dy\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{Z}}(x) \mathbb{1}_{\mathcal{Z}}(y)] \mathbb{1}_{K_R}(x) \mathbb{1}_{K_R}(y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(x \in \mathcal{Z}, x - y \in \mathcal{Z}) \mathbb{1}_{K_R}(x) \mathbb{1}_{K_R}(x - y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(\mathbf{0} \in \mathcal{Z}, y \in \mathcal{Z}) \gamma_{K_R}(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_{K_R}(y) (p^2 + (1 - p)^2 (e^{\lambda \gamma_{z_0}(y)} - 1)) dy.
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\mathbb{E}[V_d(\mathcal{Z} \cap K_R)] = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{Z}}(x) \mathbb{1}_{K_R}(x)] dx = p \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_R}(x) dx = p V_d(K_R)$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \gamma_{K_R}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} V_d(K_R \cap (K_R \oplus \{x\})) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_R}(y) \mathbb{1}_{K_R \oplus \{x\}}(y) dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_R}(y) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_R \oplus \{-y\}}(-x) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_R}(y) V_d(K_R \oplus \{-y\}) dy \\
&= V_d(K_R)^2.
\end{aligned}$$

Dies liefert unter Verwendung von sphärischen Koordinaten

$$\begin{aligned}
\text{Var}(V_d(\mathcal{Z} \cap K_R)) &= R^d (1 - p)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_K\left(\frac{x}{R}\right) (e^{\lambda \gamma_{z_0}(x)} - 1) dx \\
&= R^d d \kappa_d (1 - p)^2 \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \gamma_K\left(\frac{ru}{R}\right) (e^{\lambda \gamma_{z_0}(ru)} - 1) r^{d-1} d\nu_{d-1}(u) dr, \quad (4.22)
\end{aligned}$$

wobei wir zusätzlich von der Eigenschaft

$$\gamma_{K_R}(x) = V_d(K_R \cap (K_R \oplus \{x\})) = R^d V_d(K \cap (K \oplus \{\frac{x}{R}\})) = R^d \gamma_K\left(\frac{x}{R}\right)$$

Gebrauch gemacht haben.

Satz 4.23. *Es seien $K \in \mathcal{K}_+^k$ mit $k \geq 3$ und $0 < \text{diam } \mathcal{Z}_0 \leq M < \infty$ fast sicher für ein $M > 0$ gegeben. Dann verfügt die Varianz in (4.22) die asymptotische Entwicklung*

$$\begin{aligned} \text{Var}(V_d(\mathcal{Z} \cap K_R)) &= C_{d,1}(K)R^d - C_{d,2}(K)R^{d-1} + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k C_{d,\ell}(K)R^{d-\ell} \\ &\quad + \mathcal{O}(R^{d-(k+1)}), \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

mit Konstanten $C_{d,1}(K), C_{d,2}(K), C_{d,3}(K) > 0$ und $C_{d,\ell}(K), \ell \in \{5, \dots, k\}$ ungerade.

Beweis. Unter Verwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz und der Eigenschaft

$$\gamma_{\mathcal{Z}_0}(ru) = 0 \quad \text{für alle } r \geq M \text{ und } u \in \mathcal{S}^{d-1},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{\text{Var}(V_d(\mathcal{Z} \cap K_R))}{R^d} \\ &= d\kappa_d(1-p)^2 \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_0^M \left(V_d(K) - V_{d-1}(K | u^\perp) \frac{r}{R} + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k a_{d,\ell}(u) \left(\frac{r}{R}\right)^\ell \right) \\ &\quad \times (e^{\lambda \gamma_{\mathcal{Z}_0}(ru)} - 1) r^{d-1} dr d\nu_{d-1}(u) + \mathcal{O}(R^{-(k+1)}), \quad R \rightarrow \infty, \quad (4.23) \end{aligned}$$

mit den Konstanten $a_{d,\ell}(u), \ell \in \{3, \dots, k\}$ ungerade, aus Satz 4.5 bzw. Satz 4.9. Das Integral des ersten Summanden von (4.23) ist bestimmt durch

$$d\kappa_d(1-p)^2 V_d(K) \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_0^M r^{d-1} (e^{\lambda \gamma_{\mathcal{Z}_0}(ru)} - 1) dr d\nu_{d-1}(u),$$

der zweite durch

$$-R^{-1} d\kappa_d(1-p)^2 \int_{\mathcal{S}^{d-1}} V_{d-1}(K | u^\perp) \int_0^M r^d (e^{\lambda \gamma_{\mathcal{Z}_0}(ru)} - 1) dr d\nu_{d-1}(u),$$

und der Rest durch

$$d\kappa_d(1-p)^2 \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k R^{-\ell} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} a_{d,\ell}(u) \int_0^M r^{d+\ell-1} (e^{\lambda \gamma_{\mathcal{Z}_0}(ru)} - 1) dr d\nu_{d-1}(u).$$

Die Koeffizienten von $R^{-\ell}, \ell \in \{0, 1, 3\}$, sind schließlich, bis auf Vorzeichen, die Konstanten $C_{d,1}(K), C_{d,2}(K), C_{d,3}(K) > 0$ und die von $R^{-\ell}$ die Konstanten $C_{d,\ell}(K), \ell \in \{5, \dots, k\}$ ungerade. \square

4.2.4 Anwendung auf STIT Mosaike

Wir blicken auf Abschnitt 3.3 zurück, in dem wir uns im Wesentlichen um die Varianz der Gesamtoberfläche $V_{d-1}(Y_K(t))$ eines lokalen STIT Mosaiks $Y_K(t)$, $t > 0$, in einem Beobachtungsfenster $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ beschäftigt haben. Wir haben gezeigt, dass die Varianz die Identität

$$\text{Var}(V_{d-1}(Y_K(t))) = \frac{d(d-1)\kappa_d}{2} \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_K(ru)(1 - e^{-t\gamma_{d,0}r})r^{d-3} d\nu_{d-1}(u) dr$$

im isotropen Fall erfüllt. Mithilfe der Taylorentwicklung von γ_K in $0+$ möchten wir gerne das asymptotische Verhalten von $V_{d-1}(Y_{K_R}(t))$ mit $K_R := R \cdot K$ und $K \in \mathcal{K}_+^k$, $k \geq 3$, für $R \rightarrow \infty$ klassifizieren. Wegen (3.5) reicht es, das asymptotische Verhalten von

$$\text{Var}(V_{d-1}(Y_{K_R}(t))) = \frac{d(d-1)\kappa_d}{2} R^{2(d-1)} \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \gamma_K(ru)(1 - e^{-t\gamma_{d,0}Rr})r^{d-3} d\nu_{d-1}(u) dr$$

für $R \rightarrow \infty$ zu untersuchen. Dafür müssen wir zunächst prüfen, ob hier die Taylorentwicklung von γ_K in $0+$ angewendet werden darf. Wir definieren für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$

$$b(u) := \sup \{r > 0 : \gamma(ru) > 0\}.$$

Offensichtlich gilt

$$0 < \text{inr } K \leq b(u) \leq \text{diam } K \quad (4.24)$$

für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$. Deswegen ergibt sich unter Verwendung des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} & \text{Var}(V_{d-1}(Y_{K_R}(t))) \\ &= \frac{d(d-1)\kappa_d}{2} R^{2(d-1)} \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_0^{b(u)} \gamma_K(ru)(1 - e^{-t\gamma_{d,0}Rr})r^{d-3} dr d\nu_{d-1}(u). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Wir konzentrieren uns zuerst auf den Fall $d = 2$ und zeigen, dass das Integral in (4.25) nur vom asymptotischen Verhalten von γ_K in $0+$ abhängt.

Lemma 4.24. *Für $d = 2$ wird das asymptotische Verhalten des Integrals in (4.25) nur von dem des Kovariogrammes γ_K in $0+$ für $K \in \hat{\mathcal{K}}^2$ bestimmt.*

Beweis. Es sei

$$f_R(\varepsilon) := \int_{\mathcal{S}^1} \int_\varepsilon^{b(u)} \gamma_K(ru) \frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0}Rr}}{r} dr d\nu_1(u)$$

mit $0 < \varepsilon < \min(\text{inr } K, \frac{1}{2})$ gegeben. Der Satz von der monotonen Konvergenz impliziert

$$\pi R^2 f_R(\varepsilon) \rightarrow \text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))), \quad \varepsilon \rightarrow 0+,$$

für festes $R > 0$. Wir erhalten einerseits

$$\begin{aligned} f_R(\varepsilon) &\leq \bar{\gamma}_K(0) \int_{S^1} \int_{\varepsilon}^{b(u)} \frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0}Rr}}{r} dr d\nu_1(u) \leq V_2(K) \int_{\varepsilon}^{\text{diam } K} \frac{1}{r} dr \\ &= V_2(K) \left[\ln(\text{diam } K) + \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right] \end{aligned}$$

und andererseits mithilfe der Monotonie der isotropierten Mengen-Kovarianzfunktion

$$\begin{aligned} f_R(\varepsilon) &\geq \bar{\gamma}_K(\text{inr } K) \int_{\varepsilon}^{\text{inr } K} \frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0}Rr}}{r} dr \geq \bar{\gamma}_K(\text{inr } K) \int_{\varepsilon}^{\text{inr } K} \frac{1 - \varepsilon}{r} dr \\ &\geq \frac{\bar{\gamma}_K(\text{inr } K)}{2} \left[\ln(\text{inr } K) + \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right] \end{aligned}$$

für $R \geq (t\gamma_{2,0}\varepsilon)^{-1} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$. Für festes $0 < \varepsilon < \min(\text{inr } K, \frac{1}{2})$ ist die Funktion $f_R(\varepsilon)$ beschränkt, falls $R \rightarrow \infty$, aber sie divergiert gegen unendlich, falls $\varepsilon \rightarrow 0+$. \square

Für den Fall $d \geq 3$ bleibt Lemma 4.24 nicht gültig. Dies beruht auf folgender Beobachtung.

Lemma 4.25. *Falls $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ für $d \geq 3$ gilt, ist das Integral in (4.25) für $R \rightarrow \infty$ beschränkt.*

Beweis. Wir definieren

$$f_R(\varepsilon) := \int_{S^{d-1}} \int_{\varepsilon}^{b(u)} \gamma_K(ru) (1 - e^{-t\gamma_{d,0}Rr}) r^{d-3} dr d\nu_{d-1}(u)$$

mit $0 < \varepsilon < \min(\text{inr } K, \frac{1}{2})$ und bemerken, dass

$$\frac{d(d-1)\kappa_d}{2} R^{2(d-1)} f_R(\varepsilon) \rightarrow \text{Var}(V_{d-1}(Y_{K_R}(t))), \quad \varepsilon \rightarrow 0+,$$

gilt. Mit den Abschätzungen aus dem Beweis von Lemma 4.24 erhalten wir eine obere und untere Schranke, die durch

$$f_R(\varepsilon) \leq V_d(K) \int_{\varepsilon}^{\text{diam } K} r^{d-3} dr = \frac{V_d(K)}{d-2} \left((\text{diam } K)^{d-2} - \varepsilon^{d-2} \right)$$

und

$$f_R(\varepsilon) \geq \frac{1}{2(d-2)} \bar{\gamma}_K(\text{inr } K) \left[(\text{inr } K)^{d-2} - \varepsilon^{d-2} \right]$$

für $R \geq (t\gamma_{d,0}\varepsilon)^{-1} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$ gegeben sind. Offensichtlich ist die Funktion $f_R(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0+$ beschränkt. Dies liefert die gewünschte Behauptung. \square

Schließlich sind wir in der Lage, für $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ mit $d \geq 3$ das asymptotische Verhalten von $\text{Var}(V_{d-1}(Y_{K_R}(t)))$ für $R \rightarrow \infty$ zu charakterisieren.

Korollar 4.26. *Das asymptotische Verhalten von $\text{Var}(V_{d-1}(Y_{K_R}(t)))$ ist für alle $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ mit $d \geq 3$ durch*

$$\tilde{c}_d(K)R^{2(d-1)}, \quad R \rightarrow \infty,$$

gegeben, wobei

$$\tilde{c}_d(K) = \frac{d-1}{2} \int_K \int_K \|x-y\|^{-2} dx dy$$

gilt.

Beweis. Die Anwendung der Transformationsformel auf $\tilde{c}_d(K)$ ergibt

$$\tilde{c}_d(K) = \frac{d-1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(x) \mathbb{1}_K(x-y) \|y\|^{-2} dx dy = \frac{d-1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_K(y) \|y\|^{-2} dy.$$

Unter Verwendung von sphärischen Koordinaten und des Satzes von der monotonen Konvergenz erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{c}_d(K) &= \frac{d(d-1)\kappa_d}{2} \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \gamma_K(ru) r^{-2} r^{d-1} d\nu_{d-1}(u) dr \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{d(d-1)\kappa_d}{2} \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \gamma_K(ru) (1 - e^{-t\gamma_{d,0}Rr}) r^{d-3} d\nu_{d-1}(u) dr. \end{aligned}$$

Lemma 4.25 liefert dann das gewünschte asymptotische Verhalten. \square

Wir wenden uns wieder dem Fall $d = 2$ zu und nehmen an, dass $K \in \mathcal{K}_+^k$ für $k \geq 3$ gilt. Entsprechend der Taylorentwicklung der Ordnung k von γ_K in $0+$ und Lemma 4.24 ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) &= \pi R^2 \int_{S^1} \int_0^{b(u)} \left(V_2(K) - V_1(K|u^\perp) r + \sum_{\substack{\ell=3 \\ \ell \text{ ungerade}}}^k a_{2,\ell}(u) r^\ell + \mathcal{O}(r^{k+1}) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0}Rr}}{r} \right) dr d\nu_1(u). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Wenden wir nun aus Korollar 2.26 die Ungleichung

$$\ln(x) + \gamma + \frac{e^{-x}}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) < \text{Ein}(x) < \ln(x) + \gamma + e^{-x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

für alle $x > 0$ mit

$$\text{Ein}(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-y}}{y} dy$$

und der Euler-Mascheroni-Konstante γ an, dann bekommen wir wegen (4.24) für das erste Integral in (4.26) die obere Schranke

$$\begin{aligned} & \int_{S^1} \int_0^{b(u)} V_2(K) \left(\frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0}Rr}}{r} \right) dr d\nu_1(u) \\ &= V_2(K) \int_{S^1} \int_0^{t\gamma_{2,0}b(u)R} \frac{1 - e^{-r}}{r} dr d\nu_1(u) \\ &< V_2(K) \int_{S^1} \left[\ln(t\gamma_{2,0}b(u)R) + \gamma + e^{-t\gamma_{2,0}b(u)R} \ln \left(1 + \frac{1}{t\gamma_{2,0}b(u)R} \right) \right] d\nu_1(u) \\ &= V_2(K) \left(\ln(R) + \gamma + \int_{S^1} \ln(t\gamma_{2,0}b(u)) d\nu_1(u) \right) + \mathcal{O}(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

und eine untere Schranke

$$\begin{aligned} & V_2(K) \int_{S^1} \left[\ln(t\gamma_{2,0}b(u)R) + \gamma + \frac{e^{-t\gamma_{2,0}b(u)R}}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{t\gamma_{2,0}b(u)R} \right) \right] d\nu_1(u) \\ &= V_2(K) \left(\ln(R) + \gamma + \int_{S^1} \ln(t\gamma_{2,0}b(u)) d\nu_1(u) \right) + \mathcal{O}(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (4.24) existiert das Integral

$$\int_{S^1} \ln(t\gamma_{2,0}b(u)) d\nu_1(u).$$

Wir schreiben $a_{2,1}(u) = -V_1(K|u^\perp)$. Dann müssen wir die Integrale

$$\begin{aligned} & \int_{S^1} a_{2,\ell}(u) \int_0^{b(u)} r^\ell \left(\frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0}Rr}}{r} \right) dr d\nu_1(u) \\ &= \left(\frac{1}{t\gamma_{2,0}R} \right)^\ell \int_{S^1} a_{2,\ell}(u) \int_0^{t\gamma_{2,0}b(u)R} r^{\ell-1} (1 - e^{-r}) dr d\nu_1(u) \end{aligned} \quad (4.27)$$

für ungerade $\ell \in \{1, \dots, k\}$ untersuchen. Daher genügt es, das Integral

$$\int_0^x r^{\ell-1}(1 - e^{-r}) \, dr$$

für ungerade $\ell \in \{1, \dots, k\}$ zu berechnen.

Lemma 4.27. *Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ erhalten wir*

$$\int_0^x r^{\ell-1}(1 - e^{-r}) \, dr = \frac{x^\ell}{\ell} + e^{-x} \sum_{m=1}^{\ell-1} \left(\prod_{n=1}^{m-1} (\ell - n) \right) x^{\ell-m} - (\ell - 1)!(1 - e^{-x}).$$

Beweis. Sei nun $x > 0$ beliebig gegeben. Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Formel für $\ell = 1$ gültig ist. Für $\ell \geq 2$ liefert partielle Integration induktiv

$$\begin{aligned} \int_0^x r^{\ell-1}(1 - e^{-r}) \, dr &= \int_0^x r^{\ell-1} \, dr - \int_0^x r^{\ell-1} e^{-r} \, dr \\ &= \frac{x^\ell}{\ell} - \left([-r^{\ell-1} e^{-r}]_0^x + (\ell - 1) \int_0^x r^{\ell-2} e^{-r} \, dr \right) \\ &= \frac{x^\ell}{\ell} + e^{-x} \sum_{m=1}^{\ell-1} \left(\prod_{n=1}^{m-1} (\ell - n) \right) x^{\ell-m} - (\ell - 1)!(1 - e^{-x}), \end{aligned}$$

wobei $\prod_{n=1}^0 := 1$ gesetzt wird. □

Aus Lemma 4.27 folgern wir, dass die Integrale aus (4.27) beschränkt sind. Weiterhin ist es uns nicht möglich, eine asymptotische Entwicklung für diese Integrale zu bestimmen. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 4.28. *Das asymptotische Verhalten von $\text{Var}(V_1(Y_K(t)))$ ist für alle $K \in \mathcal{K}_+^k$ mit $k \geq 3$ durch*

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = \pi V_2(K) R^2 \ln(R) + \mathcal{O}(R^2), \quad R \rightarrow \infty,$$

gegeben.

Das nächste Kapitel stellt eine Methode vor, die das asymptotische Verhalten der Varianz aus Satz 4.28 verfeinern wird. Dafür benötigen wir lediglich die Forderung, dass $K \in \hat{\mathcal{K}}^2$ gilt.

Kapitel 5

Momente der Gesamtoberfläche von lokalen STIT Mosaike

Dieses Kapitel liefert eine Momentenformel für Funktionale von lokalen STIT Mosaike. Insbesondere lässt sich diese Formel auf die Varianz der Gesamtoberfläche eines lokalen STIT Mosaiks im isotropen Fall anwenden. Mithilfe der in Abschnitt 2.5 vorgestellten Exponentialintegrale können wir für wachsende Beobachtungsfenster $K \in \hat{\mathcal{K}}^2$ eine bessere Asymptotik der Varianz als die in Unterabschnitt 4.2.4 beweisen. Abschließend untersuchen wir diese asymptotische Entwicklung für bestimmte Beobachtungsfenster.

5.1 Momentenformel für Funktionale von lokalen STIT Mosaike

In diesem Kapitel setzen wir zunächst $K \in \mathcal{K}^d$ mit $\Lambda_d([K]) > 0$ voraus. Wir können für $t \geq 0$ die Gesamtoberfläche von einem lokalen STIT Mosaike $Y_K(t)$ auch durch

$$V_{d-1}(Y_K(t)) = \Sigma_{V_{d-1}}(Y_K(t)) := \sum_{f \in \text{MP}_{d-1}(Y_K(t))} V_{d-1}(f)$$

charakterisieren. In Abschnitt 3.3 haben wir bereits gesehen, dass das erste Moment von $V_{d-1}(Y_K(t))$ für beliebiges Λ_d und das zweite Moment zumindest im isotropen Fall existiert. Wir können allerdings unter Verwendung von Graphentheorie zeigen, dass für beliebiges Λ_d sogar jedes Moment existiert und die momenterzeugende Funktion von $V_{d-1}(Y_K(t))$ auf einem Intervall wohldefiniert ist.

Satz 5.1. *Jedes Moment von $V_{d-1}(Y_K(t))$ existiert und die momenterzeugende Funktion*

$$m_{V_{d-1}(Y_K(t))}(\lambda) := \mathbb{E}[\exp(\lambda V_{d-1}(Y_K(t)))]$$

von $V_{d-1}(Y_K(t))$ ist auf $(-\infty, -\ln(1 - p_t))$ mit $p_t = e^{-\Lambda_d([K])t}$ wohldefiniert.

Beweis. Zur Verifizierung der Behauptung verwenden wir Grundlagen der Graphentheorie. Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit B den unendlichen Binärbaum, in dem jeder Knoten genau zwei Kindknoten (Nachfolger) besitzt. Im Sinne der vorgestellten Konstruktion aus Bemerkung 2.22 kann seine Knotenmenge durch $\{(L_j, H_j, s(j)) : j \in \mathbb{N}\}$ beschrieben werden, wobei $s(j) \in \{-1, +1\}$ gilt und der Knoten $(L_1, H_1, 1)$ die Wurzel kennzeichnet. Ausgehend von der Wurzel ist der linke Kindknoten durch $(L_2, H_2, -1)$ und der rechte durch $(L_3, H_3, 1)$ identifiziert. Mit dieser Art und Weise ist jeder Knoten induktiv definiert. Gemäß der Konstruktion hat $s(j)$ den Wert -1 für alle linken Kindknoten und $+1$ für alle rechten Kindknoten.

Für $t > 0$ bezeichnet $B(t)$ den zufälligen, aber fast sicher endlichen Teilbaum von B , der der Bedingung

$$\sum_{i=1}^k L_{j_i} \leq t < \sum_{i=1}^{k+1} L_{j_i}, \quad 1 = j_1 < j_2 < \dots < j_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (5.1)$$

für alle Pfade $(L_1, H_1, 1), (L_{j_2}, H_{j_2}, s(j_2)), \dots, (L_{j_{k+1}}, H_{j_{k+1}}, s(j_{k+1}))$ genügt. Außerdem nennen wir einen Knoten, der die Bedingung (5.1) erfüllt, ein Blatt des Baumes $B(t)$. Offensichtlich ist jeder Pfad eindeutig durch das Tupel $(1, s(j_2), \dots, s(j_{k+1}))$ bestimmt, wobei k vom jeweiligen Pfad abhängt.

Wir interessieren uns für die Menge aller Pfade in $B(t)$ von der Wurzel bis zu den Blättern, welche durch

$$\beta(t) := \{(s(j_1), s(j_2), \dots, s(j_{k+1})) \in \{+1\} \times \{-1, +1\}^k : \\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, (s(j_1), s(j_2), \dots, s(j_{k+1})) \text{ ist ein Pfad zu einem Blatt in } B(t)\}$$

beschrieben werden. Dann kann man zeigen, dass der stochastische Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ mit $X(t) := \text{card } \beta(t)$ einen linearen Geburtenprozess mit Parameter $\Lambda_d([K])$ ist und $X(t)$ eine geometrische Verteilung auf \mathbb{N} mit Parameter $p_t = e^{-\Lambda_d([K])t}$ besitzt, siehe [20]. Die Anzahl der Hyperebenen, die (ohne Vielfachheit) zur Konstruktion aller Pfade mit der Eigenschaft (5.1) beitragen, ist gleich der Kardinalität von $\beta(t) - 1$. Aus diesem Grund sind wir in der Lage, eine obere Schranke für jedes Moment von $V_{d-1}(Y_K(t))$ zu berechnen, da

$$0 \leq V_{d-1}(Y_K(t)) \leq (\text{diam } K)^{d-1} (X(t) - 1). \quad (5.2)$$

Daher reicht es aus, die obige Behauptung für die Zufallsvariable $X(t)$ zu verifizieren. Sie hat die momenterzeugende Funktion

$$\begin{aligned} m_{X(t)}(\lambda) &:= \mathbb{E}[\exp(\lambda X(t))] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda k} p_t (1 - p_t)^{k-1} \\ &= p_t e^{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{\lambda} (1 - p_t))^{k-1} \\ &= \frac{p_t e^{\lambda}}{1 - e^{\lambda} (1 - p_t)}, \quad \lambda \in (-\infty, -\ln(1 - p_t)), \end{aligned}$$

wobei $-\ln(1-p_t) > 0$ mit $p_t = e^{-\Lambda_d([K])t}$ gilt. Dann ist $m_{X(t)}$ glatt auf $(-\infty, -\ln(1-p_t))$ mit

$$\mathbb{E}[X(t)^n] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial^n m_{X(t)}}{\partial \lambda^n}(0)\right] < \infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

und

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda X(t))] < \infty, \quad \lambda \in (-\infty, -\ln(1-p_t)).$$

Dies liefert schließlich mit (5.2) die gewünschte Behauptung. \square

Bemerkung 5.2. *Der Beweis hat insbesondere gezeigt, dass für jedes beschränkte und messbare Funktional ϕ auf \mathcal{P}_{d-1}^d , den Raum der $(d-1)$ -dimensionalen Polytope in \mathbb{R}^d , alle Momente des Funktionals Σ_ϕ mit*

$$\Sigma_\phi(Y_K(t)) := \sum_{f \in \text{MP}_{d-1}(Y_K(t))} \phi(f) \quad (5.3)$$

existieren. Offensichtlich besitzt $\Sigma_{V_0}(Y_K(t))$, die Anzahl der maximalen $(d-1)$ -dimensionalen Polytope, wegen (5.2) alle Momente. Für ein beschränktes und messbares Funktional ϕ existiert für jedes $t > 0$ ein $M_t > 0$, so dass

$$\sup_{f \in \text{MP}_{d-1}(Y_K(t))} |\phi(f)| \leq M_t.$$

Daher erhalten wir gemäß (5.2)

$$\mathbb{E}[|\Sigma_\phi(Y_K(t))|^k] \leq M_t^k \mathbb{E}[\Sigma_{V_0}(Y_K(t))^k] < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$.

Satz 5.3. *Für jedes beschränkte und messbare Funktional $\phi : \mathcal{P}_{d-1}^d \rightarrow [0, \infty)$ gilt*

$$\mathbb{E}[\Sigma_\phi(Y_K(t))^k] = \int_0^t \mathbb{E}[\mathbb{L}\Sigma_\phi(Y_K(s))^k] ds \quad (5.4)$$

mit dem infinitesimalen Generator \mathbb{L} dargestellt wie in (2.9).

Beweis. Wir definieren die Funktion $g_{k,n}(x) := \exp(-\frac{x}{n})x^k$ für $k, n \in \mathbb{N}$. Diese Funktion ist offensichtlich stetig auf \mathbb{R} und beschränkt für alle $k, n \in \mathbb{N}$, und die Funktionenfolge $(g_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist für festes $k \in \mathbb{N}$ monoton steigend. Daher ist Lemma 2.23 anwendbar und der stochastische Prozess $(M_{k,n}(t))_{t \geq 0}$ mit

$$\begin{aligned} M_{k,n}(t) &:= g_{k,n}(\Sigma_\phi(Y_K(t))) - g_{k,n}(\Sigma_\phi(Y_K(0))) \\ &\quad - \int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \dot{Y}_K(s) \cap H} \left[\exp\left(-\frac{\Sigma_\phi(Y_K(s) \cup f)}{n}\right) \Sigma_\phi(Y_K(s) \cup f)^k \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(-\frac{\Sigma_\phi(Y_K(s))}{n}\right) \Sigma_\phi(Y_K(s))^k \right] d\Lambda_d(H) ds \\ &=: g_{k,n}(\Sigma_\phi(Y_K(t))) - I_{k,n}(\Sigma_\phi(Y_K(t))) \end{aligned}$$

ist ein Martingal für alle $k, n \in \mathbb{N}$ bzgl. der von $(Y_K(s))_{0 \leq s \leq t}$ induzierten Filtrierung. Aus

$$0 = \mathbb{E}[M_{k,n}(0)] = \mathbb{E}[M_{k,n}(t)] \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

schließen wir

$$\mathbb{E}[g_{k,n}(\Sigma_\phi(Y_K(t)))] = \mathbb{E}[I_{k,n}(\Sigma_\phi(Y_K(t)))]$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$. Da $\Sigma_\phi \geq 0$ gilt, liefert der Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Sigma_\phi(Y_K(t))^k] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g_{k,n}(\Sigma_\phi(Y_K(t)))] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I_{k,n}(\Sigma_\phi(Y_K(t)))] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Der Beweis ist vollständig, falls wir Limes und Integration in (5.5) vertauschen dürfen. Aus Notationsgründen schreiben wir für $s \in [0, t]$

$$Z(s) = \Sigma_\phi(Y_K(s))$$

und

$$A(s) = \int_{[K]} \sum_{f \in \hat{Y}_K(s) \cap H} 1 \, d\Lambda_d(H).$$

Zusätzlich sei $M_\phi \in [1, \infty)$ eine obere Schranke von ϕ . Daher bleibt nun zu zeigen, dass

$$\left| \mathbb{E} \left[I_{k,n}(\Sigma_\phi(Y_K(t))) - \int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \hat{Y}_K(s) \cap H} (Z(s) + \phi(f))^k - Z(s)^k \, d\Lambda_d(H) \, ds \right] \right| \longrightarrow 0 \quad (5.6)$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt. Wenden wir

$$1 - e^{-x} \leq x, \quad x \geq 0,$$

auf die linke Seite von (5.6) an, dann erhalten wir unter Verwendung der Dreiecksungleichung für die Betragsfunktion $|\cdot|$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \hat{Y}_K(s) \cap H} (Z(s) + \phi(f))^k \left| \exp \left(-\frac{Z(s) + \phi(f)}{n} \right) - 1 \right| \, d\Lambda_d(H) \, ds \right] \\ & \quad + \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \hat{Y}_K(s) \cap H} Z(s)^k \left| \exp \left(-\frac{Z(s)}{n} \right) - 1 \right| \, d\Lambda_d(H) \, ds \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \hat{Y}_K(s) \cap H} \frac{(Z(s) + \phi(f))^{k+1}}{n} \, d\Lambda_d(H) \, ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \tilde{Y}_K(s) \cap H} \frac{Z(s)^{k+1}}{n} d\Lambda_d(H) ds \right] \\
& \leq \frac{2}{n} \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \tilde{Y}_K(s) \cap H} (Z(s) + \phi(f))^{k+1} d\Lambda_d(H) ds \right] \\
& = \frac{2}{n} \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \tilde{Y}_K(s) \cap H} Z(s)^\ell \phi(f)^{k+1-\ell} d\Lambda_d(H) ds \right] \\
& \leq \frac{2M_\phi^{k+1}}{n} \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} \mathbb{E} \left[\int_0^t Z(s)^\ell A(s) ds \right] \\
& \leq \frac{2tM_\phi^{k+1}}{n} \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} \mathbb{E}[Z(t)^\ell A(t)].
\end{aligned}$$

Schließlich führt uns die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Integrale zu

$$\frac{2tM_\phi^{k+1}}{n} \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} \mathbb{E}[\Sigma_\phi(Y_K(t))^{2\ell}]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[A(t)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Da $\mathbb{E}[\Sigma_\phi(Y_K(t))^{2\ell}] < \infty$ nach Bemerkung 5.2 für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt, hängt die Konvergenz gegen 0 nur noch von der Existenz des zweiten Moments von $A(t)$ ab. Es gilt

$$\begin{aligned}
A(t) & = \int_{[K]} \sum_{f \in \tilde{Y}_K(t) \cap H} 1 d\Lambda_d(H) \leq \int_{[K]} \left(\sum_{f \in \text{MP}_{d-1}(Y_K(t))} 1 \right) + 1 \Lambda_d(H) \\
& \leq \Lambda_d([K])(\Sigma_{V_0}(Y_K(t)) + 1).
\end{aligned}$$

Daher folgt die Behauptung mit Bemerkung 5.2. □

Bemerkung 5.4. *Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 5.3 kann man zeigen, dass für jedes beliebige Moment $\mathbb{E}[\Sigma_\phi(Y_K(t))^\delta]$, $\delta > 0$, die Momentenformel aus (5.4) ebenfalls gilt. Dazu benötigt man lediglich die Abschätzung*

$$(x + y)^\delta \leq 2^\delta(x^\delta + y^\delta), \quad x, y \geq 0.$$

Beispiel 5.5. *Der Erwartungswert für die Gesamtoberfläche von $Y_K(t)$ ist unter Verwen-*

ung der Additivität von V_{d-1} und des Prinzips von Cavalieri durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \hat{Y}_K(s) \cap H} V_{d-1}(f) d\Lambda_d(H) ds\right] \\
&= t \int_{[K]} V_{d-1}(H) d\Lambda_d(H) \\
&= t \int_{\mathcal{H}_0^d} \int_{H_0^\perp} V_{d-1}(K \cap (H_0 \oplus \{x\})) d\ell_{H_0^\perp}(x) d\Lambda_d^0(H_0) \\
&= t \int_{\mathcal{H}_0^d} V_d(K) d\Lambda_d^0(H_0) = t V_d(K)
\end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$ gegeben.

Für den Rest des Kapitels setzen wir $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ voraus. Mit der Momentenformel aus (5.4) lassen sich Abschätzungen für jedes Moment der Gesamtoberfläche eines lokalen STIT Mosaiks $Y_K(t)$ für den isotropen Fall $\Lambda_d = \Lambda_d^{iso}$ ableiten.

Korollar 5.6. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ lässt sich eine untere und obere Schranke für das k -te Moment $\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^k]$ angeben, wobei die untere Schranke durch*

$$k V_d(K) \int_0^t \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(s))^{k-1}] ds$$

und die obere durch

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} \int_0^t \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(s))^\ell] ds \int_{[K]} V_{d-1}(K \cap H)^{k-\ell} d\Lambda_d(H)$$

gegeben sind.

Beweis. Die Anwendung des Satzes 5.3 auf $\phi = V_{d-1}$ ergibt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(t))^k] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \hat{Y}_K(s) \cap H} V_{d-1}(Y_K(s) \cup f)^k - V_{d-1}(Y_K(s))^k d\Lambda_d(H) ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{[K]} \sum_{f \in \hat{Y}_K(s) \cap H} (V_{d-1}(Y_K(s)) + V_{d-1}(f))^k - V_{d-1}(Y_K(s))^k d\Lambda_d(H) ds\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{[K]} V_{d-1}(Y_K(s))^\ell \sum_{f \in \hat{Y}_K(s) \cap H} V_{d-1}(f)^{k-\ell} d\Lambda_d(H) ds\right] \tag{5.7}
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgern wir aus

$$\sum_{j=0}^n a_j^m \leq \left(\sum_{j=0}^n a_j \right)^m, \quad a_j \geq 0 \text{ für alle } j \in \{0, \dots, n\}, m, n \in \mathbb{N},$$

dass die obere Schranke durch

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_{[K]} V_{d-1}(Y_K(s))^\ell V_{d-1}(K \cap H)^{k-\ell} d\Lambda_d(H) ds \right] \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} \int_0^t \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(s))^\ell] ds \int_{[K]} V_{d-1}(K \cap H)^{k-\ell} d\Lambda_d(H) \end{aligned}$$

gegeben ist. Die untere Schranke erhält man, indem man auf den Summanden $\ell = k - 1$ in (5.7) die Crofton-Formel anwendet. \square

5.2 Das asymptotische Verhalten der Varianz der Gesamtkantenlänge von lokalen STIT Mosaike

Im Folgenden werden wir insbesondere das asymptotische Verhalten der Varianz der Gesamtkantenlänge $V_1(Y_{K_R}(t))$ eines lokalen STIT Mosaiks $Y_{K_R}(t)$ für $t > 0$ in einem wachsenden Beobachtungsfenster $K_R = R \cdot K$, $R \rightarrow \infty$, mit $K \in \hat{\mathcal{K}}^2$ untersuchen. In Korollar 5.6 haben wir gesehen, dass wir eine obere und untere Schranke für jedes Moment von $V_{d-1}(Y_{K_R}(t))$ angeben können. Damit lässt sich die Asymptotik für jedes Moment von $V_{d-1}(Y_{K_R}(t))$ bestimmen. Dabei bedeutet das Symbol \sim die asymptotische Äquivalenz von Funktionen, d.h., für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $f(R) \sim g(R)$ genau dann, wenn $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{f(R)}{g(R)} = 1$ gilt.

Lemma 5.7. *Jedes Moment von $V_{d-1}(Y_{K_R}(t))$ mit $K \in \hat{\mathcal{K}}^d$ genügt der Asymptotik*

$$\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_{K_R}(t))^k] \sim t^k V_d(K)^k R^{dk}, \quad R \rightarrow \infty,$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t > 0$.

Beweis. Zuerst erinnern wir uns zurück an die Gleichung (3.5), welche besagt, dass

$$Y_{K_R}(t) \stackrel{D}{=} R Y_K(tR)$$

gilt. Die Anwendung des Korollars 5.6 führt uns mithilfe der Homogenität von V_{d-1} zu der unteren Schranke

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_{K_R}(t))^k] &= R^{(d-1)k} \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(tR))^k] \\ &\geq R^{(d-1)k} \left(k V_d(K) \int_0^{tR} \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(s))^{k-1}] ds \right) \end{aligned}$$

und rekursiv ergibt sich mit Beispiel 5.5

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_{K_R}(t))^k] &\geq R^{(d-1)k} \prod_{\ell=2}^k \ell V_d(K)^{k-1} \int_0^{tR} \int_0^{s_{k-1}} \dots \int_0^{s_2} \mathbb{E}[V_{d-1}(Y_K(s_1))] ds_1 \dots ds_{k-1} \\
&= R^{(d-1)k} V_d(K)^{k-1} \prod_{\ell=2}^k \ell \int_0^{tR} \int_0^{s_{k-1}} \dots \int_0^{s_2} s_1 V_d(K) ds_1 \dots ds_{k-1} \\
&= t^k V_d(K)^k R^{dk}.
\end{aligned}$$

Demnach besitzt die obere Schranke das gleiche asymptotische Verhalten wie der Summand $\ell = k - 1$. Dies liefert dann die Behauptung. \square

Bemerkung 5.8. *Der Beweis von Lemma 5.7 hat außerdem aufgezeigt, dass das asymptotische Verhalten des k -ten Moments $\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_{K_R}(t))^k]$ von $V_{d-1}(Y_{K_R}(t))$ für $R \rightarrow \infty$ mit dem von $\mathbb{E}[V_{d-1}(Y_{K_R}(t))]^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ übereinstimmt.*

Als Nächstes werden wir für $d = 2$ und $\Lambda_2 = \Lambda_2^{iso}$ das asymptotische Verhalten der Varianz $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ von $Y_{K_R}(t)$, $t > 0$, für $R \rightarrow \infty$ mit einer anderen als noch in Unterabschnitt 4.2.4 vorgestellten Technik untersuchen und werden letztendlich eine bessere asymptotische Entwicklung angeben können. Wir benötigen das folgende Lemma, das für die asymptotische Entwicklung von $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ für $R \rightarrow \infty$ nützlich sein wird. Für den Rest des Kapitels charakterisiert dabei $\mathcal{O}(R^k)$ eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{g(R)}{R^k} \in \mathbb{R}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Lemma 5.9. *Sei γ die Euler-Mascheroni-Konstante wie in 2.13. Für $\gamma_{2,0} = \frac{2}{\pi}$, $0 < a < b$ und $t > 0$ gibt es eine untere und obere Schranke für*

$$I(a, b, \gamma_{2,0}, t, R) := \int_a^b \int_a^b \frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0}|x-y|R}}{\gamma_{2,0}|x-y|} dx dy,$$

wobei eine untere Schranke durch

$$\pi(b-a)(\ln(t\gamma_{2,0}R) + \gamma - 1 + \ln(b-a)) + \frac{1}{t\gamma_{2,0}^2 R} \int_0^{t\gamma_{2,0}(b-a)R} e^{-x} f\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

und eine obere durch

$$\pi(b-a)(\ln(t\gamma_{2,0}R) + \gamma - 1 + \ln(b-a)) + \frac{2}{t\gamma_{2,0}^2 R} \int_0^{t\gamma_{2,0}(b-a)R} e^{-x} f(x) dx$$

mit $f(x) := \ln(1 + \frac{1}{x})$ gegeben sind. Zudem erhält man für $\ell \in \{1, 2\}$

$$\int_0^{t\gamma_{2,0}(b-a)R} e^{-x} f\left(\frac{x}{\ell}\right) dx = \mathcal{O}(1), \quad R \rightarrow \infty,$$

und somit insgesamt

$$I(a, b, \gamma_{2,0}, t, R) = \pi(b-a)(\ln(t\gamma_{2,0}R) + \gamma - 1 + \ln(b-a)) + \mathcal{O}(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty.$$

Beweis. Wir wenden die Transformationsformel mehrfach auf $I(a, b, \gamma_{2,0}, t, R)$ an und bekommen

$$\begin{aligned} I(a, b, \gamma_{2,0}, t, R) &= \frac{1}{\gamma_{2,0}} \int_a^b \int_{a-y}^{b-y} \frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0}|x|R}}{|x|} dx dy \\ &= \frac{1}{\gamma_{2,0}} \int_a^b \int_0^{b-y} \frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0}xR}}{x} dx dy + \frac{1}{\gamma_{2,0}} \int_a^b \int_{a-y}^0 \frac{1 - e^{t\gamma_{2,0}xR}}{-x} dx dy \\ &= \frac{1}{\gamma_{2,0}} \int_a^b \int_0^{t\gamma_{2,0}(b-y)R} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx dy + \frac{1}{\gamma_{2,0}} \int_a^b \int_0^{t\gamma_{2,0}(y-a)R} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx dy \\ &= \frac{2}{t\gamma_{2,0}^2 R} \int_0^{t\gamma_{2,0}(b-a)R} \int_0^y \frac{1 - e^{-x}}{x} dx dy = \frac{\pi}{t\gamma_{2,0}R} \int_0^{t\gamma_{2,0}(b-a)R} \text{Ein}(y) dy. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die Funktion Ein ist aus (2.12) bekannt, welche nach Korollar 2.26 die Eigenschaft

$$\ln(x) + \gamma + \frac{e^{-x}}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) < \text{Ein}(x) < \ln(x) + \gamma + e^{-x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

erfüllt. Wenden wir dies auf die letzte Transformation von $I(a, b, \gamma_{2,0}, t, R)$ in (5.8) an, dann erhalten wir die untere Schranke

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{t\gamma_{2,0}R} \int_0^{t\gamma_{2,0}(b-a)R} \ln(y) + \gamma + \frac{e^{-y}}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{y}\right) dy \\ &= \frac{\pi}{t\gamma_{2,0}R} \left([y \ln(y) - y + \gamma y]_0^{t\gamma_{2,0}(b-a)R} + \frac{1}{2} \int_0^{t\gamma_{2,0}(b-a)R} e^{-y} \ln\left(1 + \frac{2}{y}\right) dy \right) \\ &= \pi(b-a)(\ln(t\gamma_{2,0}(b-a)R) + \gamma - 1) + \frac{1}{t\gamma_{2,0}^2 R} \int_0^{t\gamma_{2,0}(b-a)R} e^{-y} \ln\left(1 + \frac{2}{y}\right) dy \\ &= \pi(b-a)(\ln(t\gamma_{2,0}R) + \gamma - 1 + \ln(b-a)) + \frac{1}{t\gamma_{2,0}^2 R} \int_0^{t\gamma_{2,0}(b-a)R} e^{-y} f\left(\frac{y}{2}\right) dy \end{aligned}$$

und analog die obere Schranke.

Schließlich bleibt noch

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln \left(1 + \frac{\ell}{x} \right) dx < \infty$$

für $\ell \in \{1, 2\}$ zu zeigen. Dafür wird es nützlich sein, die folgende Abschätzung

$$\ln(1+x) \leq \sqrt{x}$$

für alle $x \geq 0$ zu verifizieren. Dazu definieren wir die Funktion $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x - \ln(1+x)^2$, welche offensichtlich stetig differenzierbar mit erster Ableitung $g'(x) = 1 - \frac{2\ln(1+x)}{1+x}$ und $g(0) = 0$ ist. Damit müssen wir nur noch zeigen, dass die Funktion $h : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = 1 + x - 2\ln(1+x)$ die Eigenschaft $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ besitzt. Diese Funktion ist ebenfalls stetig differenzierbar mit erster Ableitung $h'(x) = 1 - \frac{2}{1+x}$ und es ist leicht zu sehen, dass $h'(x) \leq 0$ für alle $x \in [0, 1]$ und $h'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1$ gilt. Somit ist h monoton fallend auf $[0, 1]$, aber auch monoton steigend auf $[1, \infty)$. Mit $h(0) = 1$ und $h(1) = 2(1 - \ln(2)) > 0$ folgt $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Aus diesem Grund ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\infty} e^{-x} \ln \left(1 + \frac{\ell}{x} \right) dx \leq \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2\sqrt{\ell} \left([e^{-x}\sqrt{x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}\sqrt{x} dx \right) = 2\sqrt{\ell} \int_0^{\infty} e^{-x}\sqrt{x} dx, \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral existiert. Dies folgt aus der nächsten Rechnung. Es existiert nämlich eine positive Zahl $x_0 > 0$, welche die Ungleichung $e^{-x} \leq 2x^{-(3+\frac{1}{2})}$ für alle $x \geq x_0$ erfüllt. Daher erreichen wir

$$\int_0^{x_0} e^{-x}\sqrt{x} dx \leq \int_0^{x_0} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x_0^3} < \infty$$

und

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-x}\sqrt{x} dx \leq \int_{x_0}^{\infty} 2x^{-3} dx = x_0^{-2} < \infty.$$

Dies vervollständigt den Beweis. □

Als Konsequenz kann nun im isotropen Fall $\Lambda_2 = \Lambda_2^{iso}$ für $K \in \hat{\mathcal{K}}^2$ und $t > 0$ eine bessere asymptotische Entwicklung der Varianz $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ für $R \rightarrow \infty$ als im Unterabschnitt 4.2.4 festgehalten werden.

Satz 5.10. *Das asymptotische Verhalten der Varianz $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ mit $K \in \hat{\mathcal{K}}^2$ ist für $t > 0$ und $\Lambda_2 = \Lambda_2^{iso}$ durch*

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = \pi V_2(K) R^2 \ln(R) + c(K) R^2 + \mathcal{O}(R), \quad R \rightarrow \infty,$$

mit

$$c(K) := \pi V_2(K) (\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1) + \pi \int_{[K]} V_1(K \cap H) \ln(V_1(K \cap H)) d\Lambda_2^{iso}(H)$$

gegeben.

Beweis. Wegen der Eigenschaft

$$Y_{K_R}(t) \stackrel{D}{=} R Y_K(tR), \quad t > 0,$$

aus (3.5) und der Homogenität von V_1 erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) &= \text{Var}(V_1(R Y_K(tR))) \\ &= R^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{tR} \int_{[K]} \sum_{f \in \hat{Y}_K(s) \cap H} V_1(f)^2 d\Lambda_2(H) ds \right] \\ &= R^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{tR} \int_{[K]} \int_{(K \cap H)^2} \mathbb{1}_{B_{(\hat{Y}_K(s), H)}}(x, y) dx dy d\Lambda_2(H) ds \right], \end{aligned}$$

wobei

$$B_{(\hat{Y}_K(s), H)} := \{(x, y) \in (K \cap H)^2 : x \text{ und } y \text{ sind in der gleichen Zelle von } \hat{Y}_K(s) \cap H\}$$

definiert ist und \overline{xy} die Strecke zwischen x und y beschreibt. Der Satz von Fubini liefert dann unter Verwendung des Kapazitätsfunktionals $T_{Y_K(t)}$

$$\begin{aligned} \text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) &= R^2 \int_0^{tR} \int_{[K]} \int_{(K \cap H)^2} \mathbb{P}((x, y) \in B_{(\hat{Y}_K(s), H)}) dx dy d\Lambda_2(H) ds \\ &= R^2 \int_0^{tR} \int_{[K]} \int_{(K \cap H)^2} \mathbb{P}(Y_K(s) \cap \overline{xy} = \emptyset) dx dy d\Lambda_2(H) ds \\ &= R^2 \int_0^{tR} \int_{[K]} \int_{(K \cap H)^2} 1 - T_{Y_K(t)}(\overline{xy}) dx dy d\Lambda_2(H) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \int_{[K]} \int_{(K \cap H)^2} \int_0^{tR} e^{-\Lambda_2([\overline{xy}])s} ds dx dy d\Lambda_2(H) \\
&= R^2 \int_{[K]} \int_{(K \cap H)^2} \frac{1 - e^{-t\Lambda_2([\overline{xy}])R}}{\Lambda_2([\overline{xy}])} dx dy d\Lambda_2(H). \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Die Crofton-Formel impliziert mit $\Lambda_2 = \Lambda_2^{iso}$

$$\Lambda_2^{iso}([\overline{xy}]) = \gamma_{2,0} V_1(\overline{xy}).$$

Deshalb lässt sich das letzte Integral in (5.9) vereinfachen zu

$$\int_{[K]} \int_{(K \cap H)^2} \frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0} V_1(\overline{xy})R}}{\gamma_{2,0} V_1(\overline{xy})} dx dy d\Lambda_2^{iso}(H).$$

Abschließend machen wir nun von Lemma 5.9 Gebrauch, indem wir ohne Einschränkung $K \cap H = [a, b]$ für $0 \leq a < b$ und $H \in [K]$ setzen. In diesem Fall bedeutet $b - a$ die Länge $V_1(K \cap H)$. Dann besagt Lemma 5.9, dass

$$\begin{aligned}
&\int_{[K]} \int_{(K \cap H)^2} \frac{1 - e^{-t\gamma_{2,0} V_1(\overline{xy})R}}{\gamma_{2,0} V_1(\overline{xy})} dx dy d\Lambda_2^{iso}(H) \\
&= \pi \int_{[K]} V_1(K \cap H) (\ln(R) + \ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1 + \ln(V_1(K \cap H))) d\Lambda_2^{iso}(H) + \mathcal{O}(R^{-1})
\end{aligned}$$

für $R \rightarrow \infty$ gilt. Mit der Crofton-Formel folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 5.11. *Im Gegensatz zu Satz 4.28, in dem wir die asymptotische Entwicklung des Kovariogrammes γ_K in $0+$ für $K \in \mathcal{K}_+^k$, $k \geq 3$, verwendet haben, liefert der Satz 5.10 einen weiteren Ordnungsterm. Weiterhin können wir hier auf die Voraussetzung $K \in \mathcal{K}_+^k$, $k \geq 3$, verzichten und müssen lediglich $K \in \hat{\mathcal{K}}^2$ fordern.*

Für den Rest des Kapitels setzen wir $\Lambda_2 = \Lambda_2^{iso}$ stets voraus. Mit Blick auf den Koeffizienten des zweiten Ordnungsterms

$$c(K) = \pi V_2(K) (\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1) + \pi \int_{[K]} V_1(K \cap H) \ln(V_1(K \cap H)) d\Lambda_2^{iso}(H) \tag{5.10}$$

der asymptotischen Entwicklung von $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ ist nicht ersichtlich, ob dieser immer strikt positiv ist. Das kommende Lemma wird zeigen, dass dieser Koeffizient für hinreichend große $K \in \hat{\mathcal{K}}^2$ und festes $t > 0$ strikt positiv ist.

Lemma 5.12. *Für $K \in \hat{\mathcal{K}}^2$ und $t > 0$ existiert eine Zahl $M \in \mathbb{N}$, so dass (5.10) für alle $K_N = N \cdot K$ mit $N \geq M$ strikt positiv ist.*

Beweis. Wir müssen ausschließlich den letzten Summanden in (5.10) untersuchen. Es gilt mit $C := -(\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1)$

$$\begin{aligned}
& \int_{[K_M]} V_1(K_M \cap H) \ln(V_1(K_M \cap H)) d\Lambda_2^{iso}(H) - C V_2(K) \\
&= \int_{[K_M]} \mathbb{1}_{\{H \in \mathcal{H}^2 : V_1(K_M \cap H) \leq \exp(C)\}} V_1(K_M \cap H) (\ln(V_1(K_M \cap H)) - C) d\Lambda_2^{iso}(H) \\
&\quad + \int_{[K_M]} \mathbb{1}_{\{H \in \mathcal{H}^2 : V_1(K_M \cap H) > \exp(C)\}} V_1(K_M \cap H) (\ln(V_1(K_M \cap H)) - C) d\Lambda_2^{iso}(H) \\
&=: I_1(K_M) + I_2(K_M), \quad M \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Gemäß der Abschätzung

$$\ln(x) \leq x, \quad x > 0,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_1(K_M) &= - \int_{[K_M]} \mathbb{1}_{\{H \in \mathcal{H}^2 : V_1(K_M \cap H) \leq \exp(C)\}} V_1(K_M \cap H) \ln\left(\frac{1}{V_1(K_M \cap H)}\right) d\Lambda_2^{iso}(H) \\
&\quad - C \int_{[K_M]} \mathbb{1}_{\{H \in \mathcal{H}^2 : V_1(K_M \cap H) \leq \exp(C)\}} V_1(K_M \cap H) d\Lambda_2^{iso}(H) \\
&\geq - \int_{[K_M]} \mathbb{1}_{\{H \in \mathcal{H}^2 : V_1(K_M \cap H) \leq \exp(C)\}} d\Lambda_2^{iso}(H) - |C| \exp(C) \\
&\geq -(1 + |C| \exp(C)).
\end{aligned}$$

Der Integrand in $I_2(K_M)$ ist positiv für alle $M \in \mathbb{N}$ und offensichtlich integrierbar bzgl. Λ_2^{iso} . Die Anwendung des Lemmas von Fatou auf $I_2(K_M)$ zeigt, dass

$$I_2(K_M) \rightarrow \infty, \quad M \rightarrow \infty,$$

gilt. Daraus ergibt sich die Behauptung. \square

Bemerkung 5.13. *Der Beweis von Lemma 5.12 gibt insbesondere her, dass $c(K)$ genau dann ungleich null ist, falls*

$$t \neq \gamma_{2,0}^{-1} \exp\left(1 - \gamma - \frac{1}{V_2(K)} \int_{[K]} V_1(K \cap H) \ln(V_1(K \cap H)) d\Lambda_2^{iso}(H)\right). \quad (5.11)$$

Korollar 5.14. *Die Varianz der Gesamtkantenlänge $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ erfüllt die Eigenschaft*

$$\frac{\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))}{\pi V_2(K) R^2 \ln(R)} \rightarrow 1, \quad R \rightarrow \infty,$$

falls (5.10) ungleich null ist bzw. die Bedingung (5.11) realisiert wird.

Wir erinnern uns zurück an den zentralen Grenzwertsatz für die Gesamtkantenlänge $V_1(Y_{K_R}(1))$. Dieser besagt, dass

$$\frac{1}{R\sqrt{\ln(R)}} \left(V_1(Y_{K_R}(1)) - \mathbb{E}[V_1(Y_{K_R}(1))] \right) \xrightarrow{D} X, \quad R \rightarrow \infty,$$

gilt, siehe [67, Theorem 2]. Dabei bedeutet \xrightarrow{D} Konvergenz in Verteilung, und X beschreibt eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz $\pi V_2(K)$. Allgemein ergibt sich für alle $t > 0$ unter Berücksichtigung von Lemma 3.4 mit

$$Y_{K_R}(t) \stackrel{D}{=} Y(t) \cap K_R \stackrel{D}{=} t^{-1}Y(1) \cap K_R \stackrel{D}{=} t^{-1}Y_{K_{tR}}(1)$$

und der Homogenität von V_1

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R\sqrt{\ln(R)}} \left(V_1(Y_{K_R}(t)) - \mathbb{E}[V_1(Y_{K_R}(t))] \right) \\ & \stackrel{D}{=} \frac{1}{R\sqrt{\ln(R)}} \left(V_1(t^{-1}Y_{K_{tR}}(1)) - \mathbb{E}[V_1(t^{-1}Y_{K_{tR}}(1))] \right) \\ & = \frac{\sqrt{\ln(tR)}}{\sqrt{\ln(R)}} \frac{1}{tR\sqrt{\ln(tR)}} \left(V_1(Y_{K_{tR}}(1)) - \mathbb{E}[V_1(Y_{K_{tR}}(1))] \right) \xrightarrow{D} X, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Mithilfe der asymptotischen Entwicklung der Varianz $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ können wir eine untere Schranke für die Konvergenzrate im zentralen Grenzwertsatz herleiten.

Satz 5.15. *Eine untere Schranke für die Konvergenzrate im zentralen Grenzwertsatz für die Gesamtkantenlänge $V_1(Y_{K_R}(t))$ ist durch*

$$\frac{1}{\ln(R)}, \quad R \rightarrow \infty,$$

gemäß der Metrik

$$d_{\mathcal{G}}(X_1, X_2) := \sup_{g \in \mathcal{G}} |\mathbb{E}[g(X_1)] - \mathbb{E}[g(X_2)]|$$

mit Zufallsvariablen X_1 und X_2 und der Funktionenklasse

$$\mathcal{G} := \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ zweimal stetig differenzierbar mit } \sup_{x \in \mathbb{R}} |g''(x)| \leq 1\}$$

gegeben, falls (5.11) gilt.

Beweis. Offensichtlich gehört die Funktion $g(x) = \frac{x^2}{2}$ zu der Funktionenklasse \mathcal{G} . Für

$$X_1 = \frac{1}{R\sqrt{\ln(R)}} \left(V_1(Y_{K_R}(t)) - \mathbb{E}[V_1(Y_{K_R}(t))] \right)$$

und einer normalverteilten Zufallsvariable X mit Erwartungswert 0 und Varianz $\pi V_2(K)$ ergibt sich wegen Satz 5.10 und der Bedingung (5.11)

$$\frac{1}{2} |\text{Var}(X_1) - \text{Var}(X)| = \frac{|(c(K) + \mathcal{O}(R^{-1}))|}{2 \ln(R)} \geq \frac{|c(K)|}{4 \ln(R)}$$

für hinreichend große R . □

In den kommenden Unterabschnitten werden wir die asymptotische Entwicklung der Varianz der Gesamtkantenlänge $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ für $R \rightarrow \infty$ für bestimmte konvexe Beobachtungsfenster untersuchen. Dazu schauen wir uns Kreise, Ellipsen und Rechtecke als Beobachtungsfenster an. Wir beginnen mit dem Einheitskreis.

5.2.1 Die Varianz der Gesamtkantenlänge eines lokalen STIT Mosaiks in einem Kreis

Sei nun $K = B_1^2$ der Einheitskreis in \mathbb{R}^2 . In diesem Fall lässt sich der Koeffizient $c(K)$ aus Satz 5.10 explizit angeben, und die asymptotische Entwicklung der Varianz der Gesamtkantenlänge hat die folgende Gestalt.

Lemma 5.16. *Für $K = B_1^2$ erhalten wir*

$$\int_{[K]} V_1(K \cap H) \ln(V_1(K \cap H)) d\Lambda_2^{iso}(H) = \frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

und somit auch die asymptotische Entwicklung der Varianz der Gesamtkantenlänge

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = \pi^2 R^2 \ln(R) + \pi^2 \left(\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - \frac{1}{2} \right) R^2 + \mathcal{O}(R), \quad R \rightarrow \infty,$$

für alle $t > 0$.

Beweis. Wir schreiben für die linke Seite von (5.12)

$$\int_{\mathcal{H}_0^2} \int_{H_0^\perp} V_1(K \cap (H_0 \oplus \{x\})) \ln(V_1(K \cap (H_0 \oplus \{x\}))) d\ell_{H_0^\perp}(x) d\psi_2(H_0). \quad (5.13)$$

Aufgrund der Invarianz von B_1^2 gegenüber euklidischen Bewegungen können wir das letzte Integral gleichsetzen mit

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} \ln(2\sqrt{1-x^2}) dx &= 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \ln(2\sqrt{1-x^2}) dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 \ln(2 \cos(x)) dx. \end{aligned}$$

Dieses Integral kann mithilfe der partiellen Integration und der Eigenschaft

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) \ln(\cos(x)) = 0$$

zurückgeführt werden auf

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) (\cos(x) \ln(2 \cos(x))) \, dx \\ &= \left[\sin(x) (\cos(x) \ln(2 \cos(x))) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) (-\sin(x)) \ln(2 \cos(x)) \, dx \\ & \quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \left(\cos(x) \frac{-2 \sin(x)}{2 \cos(x)} \right) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \ln(2 \cos(x)) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x)) \ln(2 \cos(x)) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2(x) \, dx \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 \ln(2 \cos(x)) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 \cos(x)) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2(x) \, dx \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 \ln(2 \cos(x)) \, dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 \cos(x)) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(x)^2 \, dx \right).$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite ist leicht zu bestimmen. Die Additionstheoreme liefern unmittelbar

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(x)^2 \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \frac{1}{2} (\cos(2x) + 1) \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos(x) \, dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Es muss somit nur noch gezeigt werden, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 \cos(x)) \, dx = 0$$

gilt. Wir greifen auf die Produktentwicklung von \cos zurück, welche durch

$$\cos(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{((2k-1)\pi)^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

gegeben ist. Da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 \cos(x)) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) \, dx + \frac{\pi}{2} \ln(2)$$

gilt, ist der Beweis vollständig, falls wir die Gleichheit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$$

zeigen. Der Satz von der monotonen Konvergenz und die Stetigkeit von \ln liefern

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{((2k-1)\pi)^2}\right)\right) \, dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} -\ln\left(1 - \frac{4x^2}{((2k-1)\pi)^2}\right) \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \left(\frac{2x}{(2k-1)\pi}\right)^2\right) \, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2k-1}} \ln(1-x^2) \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \left[(1+x) \ln(1+x) + (x-1) \ln(1-x) - 2x \right]_0^{\frac{1}{2k-1}} \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \left[\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2k-1} - 1\right) \ln\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{2}{2k-1} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2k \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right) - 2(k-1) \ln\left(\frac{2(k-1)}{2k-1}\right) - 2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \sum_{k=1}^{\infty} [k(\ln(2k) - \ln(2k-1)) - (k-1)(\ln(2(k-1)) - \ln(2k-1)) - 1] \\
&= \pi \sum_{k=1}^{\infty} [k \ln(2k) - (k-1) \ln(2(k-1)) - \ln(2k-1) - 1] =: \pi \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,
\end{aligned}$$

wobei

$$0 \cdot \ln(0) := 0$$

zu definieren ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= n \ln(2n) - \sum_{k=1}^n (\ln(2k-1) + 1) = \sum_{k=1}^n (\ln(2n) - \ln(2k-1) - 1) \\
&= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{2n}{e(2k-1)}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{2n}{e(2k-1)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Die Anwendung der Stirling-Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

auf das Argument des letzten Ausdrucks führt zu

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^n \left(\frac{2n}{e(2k-1)}\right) &= \left(\frac{2n}{e}\right)^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \left(\frac{2n}{e}\right)^n \frac{\prod_{k=1}^n 2k}{(2n)!} = \left(\frac{2n}{e}\right)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} \\
&= \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(2n)!} \frac{2^n n!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n)}} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{4\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Daher konvergiert a_n gegen $-\frac{\ln(2)}{2}$ und das Integral gegen $-\frac{\pi}{2} \ln(2)$. Der Rest folgt aus Satz 5.10. \square

Korollar 5.17. Für $K = B_r^2(y)$ mit $y \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$ erreicht man

$$\int_{[K]} V_1(K \cap H) \ln(V_1(K \cap H)) d\Lambda_2^{iso}(H) = \pi r^2 \left(\ln(r) + \frac{1}{2}\right).$$

Zudem ist für alle $t > 0$ die asymptotische Entwicklung der Varianz der Gesamtkantenlänge $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ durch

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = \pi^2 r^2 R^2 \ln(R) + \pi^2 r^2 \left(\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma + \ln(r) - \frac{1}{2}\right) R^2 + \mathcal{O}(R)$$

für $R \rightarrow \infty$ gegeben.

Beweis. Wegen der Stationarität von $Y_{K_R}(t)$ können wir ohne Einschränkung $y = \mathbf{0}$ setzen. Weiterhin gilt

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = \text{Var}(V_1(Y_{B_{rR}^2(\mathbf{0})}(t))) = \text{Var}(V_1(Y_{(rR)B_1^2}(t)))$$

und die Behauptung folgt aus Lemma 5.16. \square

Bemerkung 5.18. Die untere Schranke für die Konvergenzrate im zentralen Grenzwertsatz aus Satz 5.15 ist für $K = B_r^2(\mathbf{0})$ mit $r > 0$ genau dann gegeben, wenn

$$r \neq \frac{\exp(\frac{1}{2} - \gamma)}{t\gamma_{2,0}}$$

gilt.

5.2.2 Die Varianz der Gesamtkantenlänge eines lokalen STIT Mo- saiks in einer Ellipse

In diesem Unterabschnitt beschäftigen wir uns mit Beobachtungsfenstern, die durch Ellipsen beschrieben werden. Im Gegensatz zu der Definition in (4.6) betrachten wir vereinfachend Ellipsen in der Form

$$E_{a,b} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

für $a, b > 0$. Im Folgenden interessieren wir uns für die asymptotische Entwicklung der Varianz der Gesamtkantenlänge $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ für $R \rightarrow \infty$, falls $K = E_{a,b}$ für $a, b > 0$ und $t > 0$ gilt. Gemäß Satz 5.10 gilt für $K = E_{a,b}$ mit $V_2(K) = \pi ab$

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = \pi^2 ab R^2 \ln(R) + c(K) R^2 + \mathcal{O}(R), \quad R \rightarrow \infty,$$

mit

$$c(K) := \pi^2 ab (\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1) + \pi \int_{[K]} V_1(K \cap H) \ln(V_1(K \cap H)) d\Lambda_2^{iso}(H).$$

Um den Koeffizienten $c(K)$ zu bestimmen, müssen wir wie folgt vorgehen. Wir identifizieren eine Gerade $H \in \mathcal{H}^2$ mit

$$H = H(p, \varphi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) = p\} \quad (5.14)$$

für $p \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in [0, \pi)$. Wegen

$$V_1(K \cap H(p, \varphi)) = V_1(K \cap H(-p, \varphi))$$

für alle $p \in \mathbb{R}$ und

$$V_1(K \cap H(p, \varphi)) = V_1(K \cap H(p, \pi - \varphi))$$

für alle $\varphi \in [0, \pi)$, können wir $p \geq 0$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ annehmen. Für $H = H(p, \varphi) \in \mathcal{H}^2$ besitzt $K \cap H$ fast sicher keinen Schnittpunkt oder genau zwei Schnittpunkte, welche wir im Folgenden mit (x_1, y_1) und (x_2, y_2) bezeichnen. Wir nehmen an, dass $K \cap H$ diese Schnittpunkte besitzt. Dann erfüllen die Schnittpunkte die Bedingungen

$$x_j \cos(\varphi) + y_j \sin(\varphi) = p \quad (5.15)$$

und

$$\left(\frac{x_j}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_j}{b}\right)^2 = 1 \quad (5.16)$$

für $j \in \{1, 2\}$. Aus (5.15) folgern wir, dass

$$x_1 \cos(\varphi) + y_1 \sin(\varphi) = x_2 \cos(\varphi) + y_2 \sin(\varphi)$$

gilt. Dies impliziert

$$(x_2 - x_1) = \tan(\varphi)(y_1 - y_2).$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} V_1(K \cap H) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2(1 + \tan^2(\varphi))} \\ &= |y_2 - y_1| \frac{1}{\cos(\varphi)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Zusätzlich leitet man aus (5.15) ab, dass

$$x_j = \frac{p - y_j \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

für $j \in \{1, 2\}$ gilt. Setzen wir dies in (5.16) ein, dann genügt y_j der Bedingung

$$\left(\frac{p - y_j \sin(\varphi)}{a \cos(\varphi)}\right)^2 + \left(\frac{y_j}{b}\right)^2 = 1$$

für $j \in \{1, 2\}$. Dies lässt sich vereinfachen zu

$$b^2(p^2 - 2py_j \sin(\varphi) + y_j^2 \sin^2(\varphi)) + a^2 \cos^2(\varphi)y_j^2 - a^2 b^2 \cos^2(\varphi) = 0$$

und daher gilt

$$y_j^2 - \frac{2b^2 p \sin(\varphi)}{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)} y_j + \frac{b^2 p^2 - a^2 b^2 \cos^2(\varphi)}{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)} = 0.$$

Aus Notationsgründen schreiben wir $p_*(a, b, \varphi) := \sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
|y_2 - y_1| &= 2 \frac{1}{p_*(a, b, \varphi)} \sqrt{\frac{b^4 p^2 \sin^2(\varphi)}{p_*(a, b, \varphi)^2} - b^2 p^2 + a^2 b^2 \cos^2(\varphi)} \\
&= \frac{2b}{p_*(a, b, \varphi)} \sqrt{\frac{b^2 p^2 \sin^2(\varphi) + (-p^2 + a^2 \cos^2(\varphi)) p_*(a, b, \varphi)^2}{p_*(a, b, \varphi)^2}} \\
&= \frac{2b}{p_*(a, b, \varphi)^2} \sqrt{b^2 p^2 \sin^2(\varphi) + (-p^2 + a^2 \cos^2(\varphi)) p_*(a, b, \varphi)^2} \\
&= \frac{2b}{p_*(a, b, \varphi)^2} \sqrt{-a^2 p^2 \cos^2(\varphi) + a^4 \cos^4(\varphi) + a^2 b^2 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi)} \\
&= \frac{2ab \cos(\varphi)}{p_*(a, b, \varphi)^2} \sqrt{-p^2 + b^2 \sin^2(\varphi) + a^2 \cos^2(\varphi)} \\
&= \frac{2ab \cos(\varphi)}{p_*(a, b, \varphi)^2} \sqrt{p_*(a, b, \varphi)^2 - p^2}.
\end{aligned}$$

Diese Rechnung liefert unmittelbar

$$V_1(K \cap H) = \frac{2ab}{p_*(a, b, \varphi)^2} \sqrt{p_*(a, b, \varphi)^2 - p^2}. \quad (5.18)$$

Offenbar ist dieser Wert nur für $0 \leq p \leq p_*(a, b, \varphi)$ definiert. Aber das nächste Lemma wird zeigen, dass für alle $p \geq p_*(a, b, \varphi)$ die Länge $V_1(K \cap H)$ null ist.

Lemma 5.19. *Für $a, b > 0$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt*

$$\max \{f(x) : h(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}^2\} = p_*(a, b, \varphi)$$

mit $f(x) := x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi)$ und $h(x) := (\frac{x_1}{a})^2 + (\frac{x_2}{b})^2 - 1$.

Beweis. Das Optimierungsproblem ist äquivalent zum Problem

$$-\min \{ -f(x) : h(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}^2 \} = p_*(a, b, \varphi).$$

Wir machen nun Gebrauch von den KKT-Bedingungen, um dieses Problem zu lösen. Für mehr Information über die KKT-Bedingungen und ihre Eigenschaften verweisen wir auf [30, Abschnitt 8.2]. Offenbar ist die Slater-Bedingung für $x = \mathbf{0}$ erfüllt, d.h., es existiert ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $h(x) < 0$. Deshalb liefern uns die KKT-Bedingungen die Optimallösung, welche durch

$$\begin{aligned}
-\nabla f(x) + \lambda \nabla h(x) &= 0, \\
\lambda h(x) &= 0, \quad h(x) \leq 0, \quad \lambda \geq 0,
\end{aligned}$$

gegeben sind. Die erste Bedingung führt zu

$$-\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\lambda x_1}{a^2} \\ \frac{2\lambda x_2}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Daraus folgern wir, dass λ strikt positiv sein muss. Dies impliziert $h(x) = 0$ und es gilt

$$x_1 = \frac{a^2 \cos(\varphi)}{2\lambda}, \quad x_2 = \frac{b^2 \sin(\varphi)}{2\lambda}.$$

Setzen wir dies in $h(x) = 0$ ein, dann erhalten wir

$$\frac{a^2 \cos^2(\varphi)}{4\lambda^2} + \frac{b^2 \sin^2(\varphi)}{4\lambda^2} = 1.$$

Insgesamt ergeben sich die Lösungen

$$x_1 = \frac{a^2 \cos(\varphi)}{p_*(a, b, \varphi)}, \quad x_2 = \frac{b^2 \sin(\varphi)}{p_*(a, b, \varphi)}, \quad \lambda = \frac{1}{2} p_*(a, b, \varphi) > 0.$$

Schließlich ist der gesuchte Optimalwert durch

$$\frac{a^2 \cos^2(\varphi)}{p_*(a, b, \varphi)} + \frac{b^2 \sin^2(\varphi)}{p_*(a, b, \varphi)} = p_*(a, b, \varphi)$$

bestimmt und die Behauptung folgt. □

Im Hinblick auf (5.18) und Lemma 5.19 gelangen wir zu

$$\begin{aligned} & \int_{[K]} V_1(K \cap H) \ln(V_1(K \cap H)) d\Lambda_2^{iso}(H) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} V_1(K \cap H(p, \varphi)) \ln(V_1(K \cap H(p, \varphi))) dp d\varphi \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{p_*(a, b, \varphi)} \frac{2ab\sqrt{p_*(a, b, \varphi)^2 - p^2}}{p_*(a, b, \varphi)^2} \ln\left(\frac{2ab\sqrt{p_*(a, b, \varphi)^2 - p^2}}{p_*(a, b, \varphi)^2}\right) dp d\varphi \\ &= \frac{4ab}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p_*(a, b, \varphi)^2} \left[\int_0^{p_*(a, b, \varphi)} 2\sqrt{p_*(a, b, \varphi)^2 - p^2} \ln(2\sqrt{p_*(a, b, \varphi)^2 - p^2}) dp \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{p_*(a, b, \varphi)} 2\sqrt{p_*(a, b, \varphi)^2 - p^2} \ln\left(\frac{ab}{p_*(a, b, \varphi)^2}\right) dp \right] d\varphi. \end{aligned}$$

Wenden wir die bekannte Gleichung

$$\int_0^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}r^2, \quad r > 0,$$

und das aus dem Beweis von Korollar 5.17 hervorgehende Integral

$$\int_0^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \ln(2\sqrt{r^2 - x^2}) dx = \frac{\pi}{2}r^2 \left(\ln(r) + \frac{1}{2} \right), \quad r > 0,$$

auf den ersten Summanden an, dann bekommen wir

$$\begin{aligned} & \frac{4ab}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p_*(a, b, \varphi)^2} \left(\frac{\pi}{2} p_*(a, b, \varphi)^2 \left[\ln(p_*(a, b, \varphi)) + \frac{1}{2} \right] \right) d\varphi \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p_*(a, b, \varphi)^2} \ln \left(\frac{ab}{p_*(a, b, \varphi)^2} \right) \int_0^{p_*(a, b, \varphi)} 2\sqrt{p_*(a, b, \varphi) - p^2} dp d\varphi \right) \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(p_*(a, b, \varphi)) + \frac{1}{2} d\varphi + \frac{4ab}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(\frac{ab}{p_*(a, b, \varphi)^2} \right) \pi}{p_*(a, b, \varphi)^2} p_*(a, b, \varphi)^2 d\varphi \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(p_*(a, b, \varphi)) + \frac{1}{2} + \ln \left(\frac{ab}{p_*(a, b, \varphi)^2} \right) d\varphi \\ &= 2ab \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \ln(ab) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(p_*(a, b, \varphi)) - \ln(p_*(a, b, \varphi)^2) d\varphi \right] \\ &= \pi ab \left(\ln(ab) + \frac{1}{2} \right) - ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(p_*(a, b, \varphi)^2) d\varphi. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Im nächsten Schritt berechnen wir das letzte Integral. Für $a \geq b$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(a^2 \left(\cos^2(\varphi) + \frac{b^2}{a^2} \sin^2(\varphi) \right) \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2) + \ln \left(1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \sin^2(\varphi) \right) d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \ln(a^2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)^k}{k} \sin^{2k}(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz (man wähle bspw. $\ln(2)$ als Majorante) impliziert, dass (5.21) gleichzusetzen ist mit

$$\pi \ln(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^k}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(\varphi) \, d\varphi.$$

Dementsprechend lässt sich das Integral in (5.20) für $a < b$ vereinfachen zu

$$\pi \ln(b) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)^k}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\varphi) \, d\varphi.$$

Das nächste Lemma gibt Auskunft über die letzten beiden Integrale.

Lemma 5.20. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(\varphi) \, d\varphi = \frac{\kappa_{2k}}{2\kappa_{2k-1}}.$$

Beweis. Für alle $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir mithilfe der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\varphi) \, d\varphi &= \int_0^1 v^{2k} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \, dv = \frac{1}{2} \int_0^1 w^{k-\frac{1}{2}} (1-w)^{-\frac{1}{2}} \, dw \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 w^{k+\frac{1}{2}-1} (1-w)^{\frac{1}{2}-1} \, dw = \frac{1}{2} B\left(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

wobei $B(x, y)$ die Eulersche Betafunktion

$$B(x, y) = \int_0^1 w^{x-1} (1-w)^{y-1} \, dw, \quad x, y > 0,$$

beschreibt. Verwenden wir die Charakterisierung

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0,$$

dann erhalten wir mit $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und (2.1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\varphi) \, d\varphi = \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(k+1)} = \frac{\kappa_{2k}}{2\kappa_{2k-1}}.$$

Und der Rest folgt aus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\varphi) \, d\varphi$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Zusammenfassend können wir für $t > 0$ die asymptotische Entwicklung der Varianz $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ für $R \rightarrow \infty$ bestimmen.

Lemma 5.21. *Falls $K = E_{a,b}$ für $a, b > 0$ gilt, dann ist*

$$\int_{[K]} V_1(K \cap H) \ln(V_1(K \cap H)) \, d\Lambda_2^{iso}(H) = \begin{cases} \pi ab \left(\ln(b) + \frac{1}{2} - c_{a,b} \right), & a \geq b, \\ \pi ab \left(\ln(a) + \frac{1}{2} - c_{b,a} \right), & a < b, \end{cases}$$

mit

$$c_{a,b} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\kappa_{2k}}{k\kappa_{2k-1}} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)^k.$$

Für $t > 0$ ist die asymptotische Entwicklung von $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ gegeben durch

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = \pi^2 ab R^2 \ln(R) + \pi^2 ab \left(\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma + \ln(b) - c_{a,b} - \frac{1}{2} \right) R^2 + \mathcal{O}(R)$$

für $R \rightarrow \infty$, falls $a \geq b$ gilt, und durch

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = \pi^2 ab R^2 \ln(R) + \pi^2 ab \left(\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma + \ln(a) - c_{b,a} - \frac{1}{2} \right) R^2 + \mathcal{O}(R)$$

für $R \rightarrow \infty$, falls $a < b$ gilt.

Beweis. Ohne Einschränkung sei nun $a \geq b$ gegeben. Wir haben vorhin gesehen, dass

$$\begin{aligned} & \int_{[K]} V_1(K \cap H) \ln(V_1(K \cap H)) \, d\Lambda_2^{iso}(H) \\ &= \pi ab \left(\ln(ab) + \frac{1}{2} \right) - ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(p_*(a, b, \varphi)^2) \, d\varphi \\ &= \pi ab \left(\ln(ab) + \frac{1}{2} \right) - ab(\pi \ln(a) + \pi c_{a,b}) = \pi ab \left(\ln(b) + \frac{1}{2} - c_{a,b} \right). \end{aligned}$$

Für den Koeffizienten $c(K)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} c(K) &= \pi^2 ab (\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1) + \pi^2 ab \left(\ln(b) + \frac{1}{2} - c_{a,b} \right) \\ &= \pi^2 ab \left(\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma + \ln(b) - c_{a,b} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

und mit Satz 5.10 folgt die Behauptung. □

Insbesondere ist ein Kreis mit Radius $a > 0$, siehe auch Korollar 5.17, ein Spezialfall von Lemma 5.21 für $a = b$.

Bemerkung 5.22. *Wir erhalten die untere Schranke für die Konvergenzrate im zentralen Grenzwertsatz aus Satz 5.15 für $K = E_{a,b}$ mit $a, b > 0$ genau dann, wenn für $0 < b \leq a$*

$$b \neq \frac{\exp(\frac{1}{2} + c_{a,b} - \gamma)}{t\gamma_{2,0}}$$

bzw. für $0 < a < b$

$$a \neq \frac{\exp(\frac{1}{2} + c_{b,a} - \gamma)}{t\gamma_{2,0}}$$

gilt.

5.2.3 Die Varianz der Gesamtkantenlänge eines lokalen STIT Mosaiks in einem Rechteck

Als Letztes untersuchen wir für $t > 0$ die asymptotische Entwicklung der $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ eines lokalen STIT Mosaiks $Y_{K_R}(t)$ für $R \rightarrow \infty$, falls das zugrundeliegende Beobachtungsfenster K durch ein Rechteck verkörpert wird. Im Folgenden sei nun K ein Rechteck. Ohne Einschränkung besitzt das Rechteck die Eckpunkte $(-a, -b), (a, -b), (a, b), (-a, b)$ für $a, b > 0$ mit Mittelpunkt $(0, 0)$, und wir bezeichnen dieses Rechteck mit $R_{a,b}$. Wir blicken zurück auf (5.14), welche besagt, dass jede Gerade $H \in \mathcal{H}^2$ durch

$$H = H(p, \varphi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) = p\} \quad (5.22)$$

mit $\varphi \in [0, \pi)$ und $p \in \mathbb{R}$ charakterisiert werden kann. Wie oben gilt analog für $H = H(p, \varphi)$

$$V_1(K \cap H(p, \varphi)) = V_1(K \cap H(-p, \varphi))$$

für alle $p \in \mathbb{R}$ und

$$V_1(K \cap H(p, \varphi)) = V_1(K \cap H(p, \pi - \varphi))$$

für alle $\varphi \in [0, \pi)$. Damit können wir $p \geq 0$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ annehmen. Demnach erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} & \int_{[K]} V_1(K \cap H) \ln(V_1(K \cap H)) d\Lambda_2^{iso}(H) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{-p^{**}(a,b,\varphi)}^{p^{**}(a,b,\varphi)} V_1(K \cap H(p, \varphi)) \ln(V_1(K \cap H(p, \varphi))) dp d\varphi \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{p^{**}(a,b,\varphi)} V_1(K \cap H(p, \varphi)) \ln(V_1(K \cap H(p, \varphi))) dp d\varphi. \end{aligned} \quad (5.23)$$

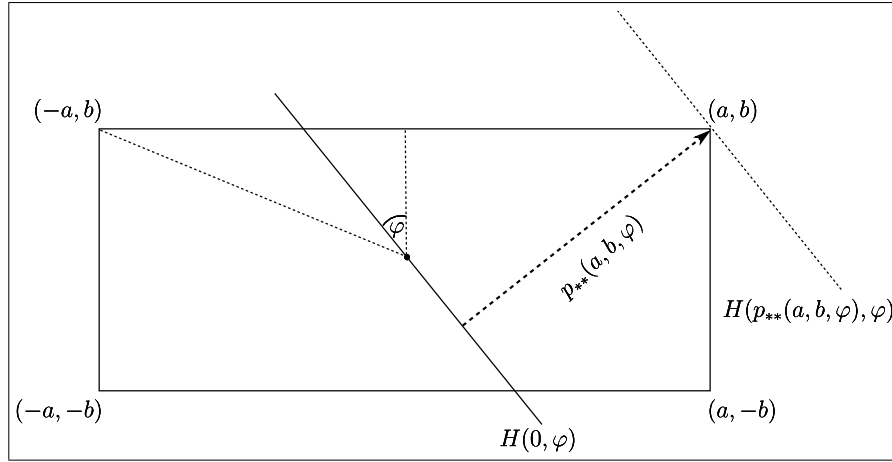


Abbildung 5.1: Der Verlauf einer Ursprungsgeraden in einem zentrierten Rechteck.

Dabei ist $p_{**}(a, b, \varphi)$ der maximale Abstand, mit dem man die durch den Winkel φ eindeutig bestimmte Ursprungsgerade verschieben kann, so dass sie das Rechteck $R_{a,b}$ noch schneidet. Gemäß der charakterisierenden Eigenschaft einer Geraden aus (5.22) und der Abbildung 5.1 gilt

$$p_{**}(a, b, \varphi) = a \cos(\varphi) + b \sin(\varphi).$$

Als Erstes betrachten wir ein festes $\varphi \in [0, \arctan(\frac{b}{a})]$. Dann besitzt $K \cap H(p, \varphi)$ zwei Schnittpunkte für alle $p \in [0, p_{**}(a, b, \varphi))$. Anhand der Abbildung 5.1 sind diese für $p \in [0, p_1(a, b, \varphi)]$ mit

$$p_1(a, b, \varphi) = a \cos(\varphi) - b \sin(\varphi)$$

durch $\{(x_1, -b), (x_2, b)\}$ und für $p \in (p_1(a, b, \varphi), p_{**}(a, b, \varphi))$ durch $\{(a, y_1), (x_2, b)\}$ mit $x_1 \in [0, a]$, $x_2 \in [-a, a]$ und $y_1 \in [-b, b]$ gegeben. Weiterhin müssen diese Schnittpunkte für $p \in [0, p_1(a, b, \varphi)]$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 \cos(\varphi) - b \sin(\varphi) &= p, \\ x_2 \cos(\varphi) + b \sin(\varphi) &= p \end{aligned} \tag{5.24}$$

und für $p \in (p_1(a, b, \varphi), p_{**}(a, b, \varphi))$

$$\begin{aligned} a \cos(\varphi) + y_1 \sin(\varphi) &= p, \\ x_2 \cos(\varphi) + b \sin(\varphi) &= p \end{aligned} \tag{5.25}$$

erfüllen.

Für $p \in [0, p_1(a, b, \varphi)]$ ergibt sich mithilfe von (5.24)

$$\begin{aligned} V_1(K \cap H(p, \varphi))^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (2b)^2 = \left(-2b \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\right)^2 + (2b)^2 \\ &= 4b^2(1 + \tan^2(\varphi)) = \left(\frac{2b}{\cos(\varphi)}\right)^2 \end{aligned}$$

und mit (5.25)

$$\begin{aligned}
V_1(K \cap H(p, \varphi))^2 &= (x_2 - a)^2 + (b - y_1)^2 = ((y_1 - b) \tan(\varphi))^2 + (b - y_1)^2 \\
&= (b - y_1)^2(1 + \tan^2(\varphi)) = \left(b - \frac{p - a \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}\right)^2 \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \\
&= \left(\frac{b \sin(\varphi) + a \cos(\varphi) - p}{\sin(\varphi)}\right)^2 \frac{1}{\cos^2(\varphi)} = \left(\frac{p_{**}(a, b, \varphi) - p}{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}\right)^2
\end{aligned}$$

für $p \in (p_1(a, b, \varphi), p_{**}(a, b, \varphi))$. Wir setzen $h(a, b) := \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ mit $h(a, a) = \frac{\pi}{4}$. Zudem zerlegen wir das Integral in (5.23) in vier Integrale, so dass der Integrationsbereich auf die Mengen

$$\begin{aligned}
&\{p \in [0, p_1(a, b, \varphi)], \varphi \in [0, h(a, b)]\}, \quad \{p \in (p_1(a, b, \varphi), p_{**}(a, b, \varphi)), \varphi \in [0, h(a, b)]\}, \\
&\{p \in [0, p_1(a, b, \varphi)], \varphi \in (h(a, b), \frac{\pi}{2}]\}, \quad \{p \in (p_1(a, b, \varphi), p_{**}(a, b, \varphi)), \varphi \in (h(a, b), \frac{\pi}{2}]\}
\end{aligned}$$

aufgeteilt wird. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
J_1(a, b) &:= \int_0^{h(a, b)} \int_0^{p_1(a, b, \varphi)} V_1(K \cap H(p, \varphi)) \ln(V_1(K \cap H(p, \varphi))) \, dp \, d\varphi \\
&= \int_0^{h(a, b)} \int_0^{p_1(a, b, \varphi)} \frac{2b \ln\left(\frac{2b}{\cos(\varphi)}\right)}{\cos(\varphi)} \, dp \, d\varphi = 2b \int_0^{h(a, b)} p_1(a, b, \varphi) \frac{\ln\left(\frac{2b}{\cos(\varphi)}\right)}{\cos(\varphi)} \, d\varphi \\
&= 2b \left(a \int_0^{h(a, b)} \ln\left(\frac{2b}{\cos(\varphi)}\right) \, d\varphi - b \int_0^{h(a, b)} \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \ln\left(\frac{\cos(\varphi)}{2b}\right) \, d\varphi \right) \\
&= 2b \left(a h(a, b) \ln(2b) - a \int_0^{h(a, b)} \ln(\cos(\varphi)) \, d\varphi - \frac{b}{2} \left[-\ln\left(\frac{\cos(\varphi)}{2b}\right)^2 \right]_0^{h(a, b)} \right) \\
&= 2b \left(a h(a, b) \ln(2b) - a \int_0^{h(a, b)} \ln(\cos(\varphi)) \, d\varphi \right) + b^2 \left[\ln\left(\frac{\cos(h(a, b))}{2b}\right)^2 - \ln(2b)^2 \right].
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist unter Berücksichtigung von

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}),$$

gleichzusetzen mit

$$2b \left(a h(a, b) \ln(2b) - a \int_0^{h(a, b)} \ln(\cos(\varphi)) \, d\varphi \right) + b^2 \left[\ln\left(\frac{a}{2b\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 - \ln(2b)^2 \right].$$

Für $a = b$ ist

$$\begin{aligned}
 J_1(a, a) &= a^2 \left(\frac{\pi}{2} \ln(2a) - 2I + \left(\frac{1}{2} \ln(2) + \ln(2a) \right)^2 - \ln(2a)^2 \right) \\
 &= a^2 \left(\frac{\pi}{2} \ln(2a) - 2I + \frac{1}{4} \ln(2)^2 + \ln(2) \ln(2a) \right) \\
 &= a^2 \left(\frac{\pi}{2} \ln(2a) - 2I + \frac{1}{4} \ln(2) (4 \ln(a) + 5 \ln(2)) \right),
 \end{aligned}$$

wobei

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(\varphi)) \, d\varphi \quad (5.26)$$

gilt. Auf dem Hauptzweig des komplexen Logarithmus lässt sich (5.26) durch

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{1}{2} (\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)) \right) \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\ln(2) + \ln(\exp(i\varphi) [1 + \exp(-2i\varphi)]) \, d\varphi
 \end{aligned} \quad (5.27)$$

ausdrücken. Dafür werden wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\exp(i\varphi) [1 + \exp(-2i\varphi)]) \, d\varphi = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \quad (5.28)$$

zeigen müssen. Dies impliziert

$$I = -\frac{\pi}{4} \ln(2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} (2\beta(2) - \pi \ln(2)).$$

Dabei ist β die Dirichletsche Beta-Funktion mit

$$\beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s},$$

wobei man $\beta(2)$ als die Catalansche Konstante bezeichnet. Da das Integral in (5.26) wegen

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\ln(\cos(\varphi))| \, d\varphi \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \ln \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right| \, d\varphi \leq \frac{\pi}{4} \left| \ln \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right| < \infty$$

existiert, gilt mithilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln (\exp (i \varphi) [1 + \exp (-2 i \varphi)]) d \varphi \\
&= i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi d \varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \exp (-2 i \varphi k) d \varphi \\
&= i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi d \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp (-2 i \varphi k) d \varphi \\
&= i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi d \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left[\frac{\exp (-2 i \varphi k)}{-2 i k} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi d \varphi + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} k \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} k \right) - 1 \right).
\end{aligned}$$

Da sowohl I als auch das erste Integral in (5.27) reellwertig sind, kann der letzte Ausdruck reduziert werden zu

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \left(\mathbb{1}_{\{k \in \{n \in \mathbb{N} : n=4\ell+1, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\}} - \mathbb{1}_{\{k \in \{n \in \mathbb{N} : n=4\ell+3, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.
\end{aligned}$$

Zudem haben wir gesehen, dass $J_1(a, a)$ offensichtlich streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$ ist.

Für den anderen Fall bekommt man

$$\begin{aligned}
J_2(a, b) &:= \int_0^{h(a, b)} \int_{p_1(a, b, \varphi)}^{p_{**}(a, b, \varphi)} \frac{p_{**}(a, b, \varphi) - p}{\sin(\varphi) \cos(\varphi)} \ln \left(\frac{p_{**}(a, b, \varphi) - p}{\sin(\varphi) \cos(\varphi)} \right) dp d\varphi \\
&= \int_0^{h(a, b)} \int_0^{\frac{2b}{\cos(\varphi)}} \sin(\varphi) \cos(\varphi) p \ln(p) dp d\varphi \\
&= \int_0^{h(a, b)} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \left[\frac{p^2}{2} \ln(p) - \frac{p^2}{4} \right]_0^{\frac{2b}{\cos(\varphi)}} d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{h(a,b)} \sin(\varphi) \left[\frac{2b^2}{\cos(\varphi)} \ln\left(\frac{2b}{\cos(\varphi)}\right) - \frac{b^2}{\cos(\varphi)} \right] d\varphi \\
&= b^2 \left(\int_0^{h(a,b)} \frac{-2 \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \ln\left(\frac{\cos(\varphi)}{2b}\right) d\varphi + \int_0^{h(a,b)} \frac{-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} d\varphi \right) \\
&= b^2 \left(\left[\ln\left(\frac{\cos(\varphi)}{2b}\right)^2 \right]_0^{h(a,b)} + \left[\ln(\cos(\varphi)) \right]_0^{h(a,b)} \right) \\
&= b^2 \left[\ln\left(\frac{\cos(h(a,b))}{2b}\right)^2 - \ln(2b)^2 + \ln(\cos(h(a,b))) \right] \\
&= b^2 \left[\ln\left(\frac{a}{2b\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 - \ln(2b)^2 + \ln\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \right].
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass $a = b$ gilt, kann der letzte Term vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned}
J_2(a, a) &= a^2 \left[\left(\frac{1}{2} \ln(2) + \ln(2a) \right)^2 - \ln(2a)^2 - \frac{1}{2} \ln(2) \right] \\
&= a^2 \left(\frac{1}{4} \ln(2)^2 + \ln(2) \ln(2a) - \frac{1}{2} \ln(2) \right) \\
&= \frac{a^2}{4} \ln(2) (4 \ln(a) + 5 \ln(2) - 2).
\end{aligned}$$

Offenbar ist $J_2(a, a)$ streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$.

Andererseits ergibt sich mithilfe von

$$\arctan(x^{-1}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad x > 0,$$

und

$$\begin{aligned}
p_{**}(a, b, \frac{\pi}{2} - \varphi) &= a \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + b \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \\
&= a \sin(\pi - \varphi) + b \cos(-\varphi) = b \cos(\varphi) + a \sin(\varphi) \\
&= p_{**}(b, a, \varphi)
\end{aligned}$$

für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\int_{h(a,b)}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{p_{**}(a,b,\varphi)} V_1(K \cap H(p, \varphi)) \ln(V_1(K \cap H(p, \varphi))) dp d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2} - h(a,b)} \int_0^{p_{**}(a,b,\frac{\pi}{2} - \varphi)} V_1(K \cap H(p, \frac{\pi}{2} - \varphi)) \ln(V_1(K \cap H(p, \frac{\pi}{2} - \varphi))) dp d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{h(b,a)} \int_0^{p_{**}(b,a,\varphi)} V_1(K \cap H(p, \varphi - \frac{\pi}{2})) \ln(V_1(K \cap H(p, \varphi - \frac{\pi}{2}))) dp d\varphi \\
&= \int_0^{h(b,a)} \int_0^{p_{**}(b,a,\varphi)} V_1(K \cap H(p, \varphi)) \ln(V_1(K \cap H(p, \varphi))) dp d\varphi \\
&= J_1(b, a) + J_2(b, a).
\end{aligned}$$

Damit erhalt man folgendes Lemma.

Lemma 5.23. *Falls $K = R_{a,b}$ fur $a, b > 0$ gilt, dann ist die asymptotische Entwicklung von $\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t)))$ fur $t > 0$ durch*

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = 4\pi abR^2 \ln(R) + c(K)R^2 + \mathcal{O}(R), \quad R \rightarrow \infty,$$

mit

$$c(K) = 4\pi ab(\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1) + 4(J_1(a, b) + J_1(b, a) + J_2(a, b) + J_2(b, a))$$

gegeben. Fur $a = b$ ergibt sich insbesondere

$$\text{Var}(V_1(Y_{K_R}(t))) = 4\pi a^2 R^2 \ln(R) + c(K)R^2 + \mathcal{O}(R), \quad R \rightarrow \infty,$$

mit

$$c(K) = 4a^2(\pi(\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1) + \pi \ln(2a) - 4I + \ln(2)(4 \ln(a) + 5 \ln(2) - 1))$$

und

$$I = -\frac{\pi}{4} \ln(2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.$$

Beweis. Es ist nur noch der Fall $a = b$ fur $a, b > 0$ zu betrachten. Der Koeffizient $c(K)$ aus Satz 5.10 ist nach den obigen Rechnungen bestimmt durch

$$\begin{aligned}
c(K) &= \pi V_2(K)(\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1) + \pi \left(\frac{4}{\pi} \left(2(J_1(a, a) + J_2(a, a)) \right) \right) \\
&= 4a^2 \pi (\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1) + 8(J_1(a, a) + J_2(a, a)) \\
&= 4a^2 \left(\pi (\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1) + 2 \left(\frac{\pi}{2} \ln(2a) - 2I + \frac{1}{4} \ln(2)(4 \ln(a) + 5 \ln(2)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \ln(2)(4 \ln(a) + 5 \ln(2) - 2) \right) \right) \\
&= 4a^2 (\pi (\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1) + \pi \ln(2a) - 4I + \ln(2)(4 \ln(a) + 5 \ln(2) - 1))
\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.24. *Die untere Schranke fur die Konvergenzrate im zentralen Grenzwertsatz aus Satz 5.15 ist fur $K = R_{a,a}$ mit $a > 0$ genau dann gegeben, wenn*

$$a \neq \exp \left(\frac{-\pi (\ln(t\gamma_{2,0}) + \gamma - 1 + \ln(2)) + 4I - \ln(2)(5 \ln(2) - 1)}{\pi + 4 \ln(2)} \right)$$

gilt.

Kapitel 6

MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit MNW-Mosaik auf der zweidimensionalen Einheitssphäre \mathcal{S}^2 . Zuerst müssen dafür sämtliche Begriffe aus dem euklidischen Raum \mathbb{R}^2 , wie z.B. die der Polygone und konvexen Körper, auf \mathcal{S}^2 übertragen und definiert werden. Weiterhin stellen wir die inneren Volumina für konvexe Körper auf \mathcal{S}^2 und einige ihrer Eigenschaften vor. Dann können wir MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2 definieren und verschiedene Mittelwerte, wie z.B. die erwartete sphärische Gesamtkantenlänge, berechnen. Abschließend kann ein Vergleich zu Mittelwerten von Poissonschen Großkreismosaik auf \mathcal{S}^2 hergestellt werden.

6.1 Grundlagen

Sei nun \mathcal{S}^2 die zweidimensionale Einheitssphäre in \mathbb{R}^3 . Die Riemannsche Metrik auf \mathcal{S}^2 wird mit $d_{\mathcal{S}^2}$ bezeichnet und ist durch

$$d_{\mathcal{S}^2}(x, y) := \arccos(x^T y), \quad x, y \in \mathcal{S}^2,$$

gegeben. Wir sagen zwei Punkte $x, y \in \mathcal{S}^2$ sind antipodal zueinander, falls $y = -x$ gilt. Man sieht leicht, dass zwei Punkte x, y genau dann antipodal zueinander sind, wenn $\|x - y\| = 2$ bzw. $d_{\mathcal{S}^2}(x, y) = \pi$ gilt. Für eine lineare Hyperebene $H \in \mathcal{H}_0^2$ nennen wir $\mathcal{S}^2 \cap H$ einen Großkreis, welcher \mathcal{S}^2 in zwei Halbsphären teilt. Wir bezeichnen die Menge aller Großkreise mit \mathcal{S}_1 . Der Durchschnitt von zwei verschiedenen Großkreisen $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_1$ ist ein antipodales Punktepaar und die Menge aller antipodalen Punktepaare wird mit \mathcal{S}_0 gekennzeichnet. Zusätzlich definieren wir auch $\mathcal{S}_2 := \{\mathcal{S}^2\}$. Man sagt auch, dass \mathcal{S}_j die Menge der j -dimensionalen Untersphären von \mathcal{S}^2 für alle $j \in \{0, 1, 2\}$ ist.

Ein konvexer Körper $K \subset \mathcal{S}^2$ ist eine nichtleere, abgeschlossene Menge, in der die Geodäte von zwei beliebigen Punkten $k_1, k_2 \in K$ mit $d_{\mathcal{S}^2}(k_1, k_2) < \pi$ ebenfalls in K liegt. Dabei beschreibt die Geodäte von k_1 und k_2 den kürzesten Weg auf \mathcal{S}^2 , um von k_1 nach k_2 zu gelangen. Wir schreiben $\mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ für das Mengensystem aller nichtleeren, konvexen Körper auf \mathcal{S}^2 , welche mit der durch die Hausdorff-Metrik der kompakten Mengen in \mathbb{R}^3 induzierten Topologie versehen wird. Per Definition gilt daher auch $\mathcal{S}_j \subset \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ für alle $j \in \{0, 1, 2\}$, wobei \mathcal{S}^2 eine Art isoliertes Element in $\mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ verkörpert. Dazu definiert $\text{int } K$

das Innere und ∂K den Rand von $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$. Zudem bezeichnen wir für $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ mit

$$\check{K} := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i : k_i \in K, \alpha_i \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

den positiven Kegel (auch positive Hülle genannt) von K , d.h., es gilt $K = \mathcal{S}^2 \cap \check{K}$. Die Dimension von K ist definiert durch $\dim K := \dim \check{K} - 1$ und das relativ Innere $\text{relint } K$ von K ist das Innere von K bzgl. $\mathcal{S}^2 \cap \text{lin } K$, wobei $\text{lin } K$ die lineare Hülle von K beschreibt. Eine endliche Vereinigung von Elementen dieses Mengensystems nennen wir polykonvex. Das System aller polykonvexen Mengen wird im Folgenden mit $\mathcal{R}(\mathcal{S}^2)$ symbolisiert.

Für $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ bezeichnen wir fortan mit

$$K^* := \{x \in \mathcal{S}^2 : x^T y \leq 0 \text{ für alle } y \in K\} \quad (6.1)$$

den Polarkörper von K . Offensichtlich lässt sich K^* auch als

$$K^* = \left\{ x \in \mathcal{S}^2 : d_{\mathcal{S}^2}(K, x) \geq \frac{\pi}{2} \right\}$$

ausdrücken, wobei wir

$$d_{\mathcal{S}^2}(K, x) := \inf_{y \in K} d_{\mathcal{S}^2}(y, x)$$

setzen. Für $x \in \partial K$ ist

$$N(K, x) := \{y \in K^* : x^T y = 0\}$$

die Menge aller äußeren Normaleneinheitsvektoren von K in x .

Eine Menge $P \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ ist ein konvexes sphärisches Polygon, falls \check{P} polyedrisch ist, d.h. ein Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen mit dem Nullvektor $\mathbf{0}$ im Rand. Für die Menge aller konvexen sphärischen Polygone schreiben wir im Folgenden $\mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ und verlangen insbesondere, dass $\mathcal{S}^2 \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ gilt. Per Definition erhalten wir sogar $\mathcal{S}_j \subset \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ für alle $j \in \{0, 1, 2\}$.

Für $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ nennen wir $F = \mathcal{S}^2 \cap \check{F}$ eine j -Seite von P , falls \check{F} eine $(j+1)$ -Seite von \check{P} für $j \in \{0, 1\}$ ist. Und \check{F} ist genau dann eine $(j+1)$ -Seite von \check{P} , falls $\check{F} = \check{P} \cap E$ für eine Stützhyperebene E an \check{P} und $\dim \check{F} = j+1$ gilt. Wir schreiben $\mathcal{F}_0(P)$ für die Menge aller Ecken (0-Seiten) und $\mathcal{F}_1(P)$ für die Menge aller Seiten (1-Seiten) von $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$. Für alle $F \in \mathcal{F}_j(P)$, $j \in \{0, 1\}$, sieht man, dass $N(P, x)$ immer dieselbe Menge für alle $x \in \text{relint } F$ darstellt. Deshalb schreiben wir zusammenfassend $N(P, F)$ für diese Mengen. Dann heißt

$$\gamma(F, P) := \frac{\sigma_{1-j}(N(P, F))}{(2-j)\kappa_{2-j}}$$

der äußere Winkel von P bei $F \in \mathcal{F}_j(P)$, $j \in \{0, 1\}$. Dabei bezeichnen wir mit σ_j das sphärische Lebesgue-Maß auf $\mathcal{S}_j \in \mathcal{S}_j$ für $j \in \{0, 1, 2\}$. Für $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2) \setminus \{\mathcal{S}^2\}$ definieren wir zusätzlich

$$\sigma_1(\partial P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \sigma_1(F).$$

Wir werden als Nächstes die sphärischen inneren Volumina $\mu_j : \mathcal{K}(\mathcal{S}^2) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, einführen. Dabei definiert μ_2 das normierte sphärische Lebesgue-Maß, und μ_0 und μ_1 lassen sich aus der sphärischen Steiner-Formel gewinnen.

Satz 6.1 (Sphärische Steiner-Formel, [63, Theorem 6.5.1]). *Für $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ existieren eindeutige Konstanten $\mu_0(K), \mu_1(K) \geq 0$, so dass für alle $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$*

$$\sigma_2(\{x \in \mathcal{S}^2 : x \notin K, d_{\mathcal{S}^2}(K, x) \leq \varepsilon\}) = 4\pi(1 - \cos(\varepsilon))\mu_0(K) + 4\pi \sin(\varepsilon)\mu_1(K)$$

gilt.

Ist $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2) \setminus \{\mathcal{S}^2\}$, so erhält man

$$\mu_j(P) = \frac{1}{(j+1)\kappa_{j+1}} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(P)} \gamma(F, P)\sigma_j(F)$$

für $j \in \{0, 1\}$. □

Korollar 6.2. *Für $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2) \setminus \{\mathcal{S}^2\}$ mit $\text{int } P \neq \emptyset$ gilt*

$$\mu_1(P) = \frac{1}{4\pi}\sigma_1(\partial P).$$

Beweis. Nach der sphärischen Steiner-Formel ist

$$\mu_1(P) = \frac{1}{2\pi} \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \gamma(F, P)\sigma_1(F)$$

für alle $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2) \setminus \{\mathcal{S}^2\}$ mit $\text{int } P \neq \emptyset$. Offenbar existiert zu jedem $x \in \partial P$ ein $S_x \in \mathcal{S}_1$ mit der Eigenschaft $N(\{x\}, x) = S_x$ und somit $N(P, x) \subset S_x$. Da $\text{int } P \neq \emptyset$ gilt, ist $\mathcal{F}_1(P) \neq \emptyset$ und $N(P, F) = N(P, x) \subset S_x$ für alle $F \in \mathcal{F}_1(P)$ mit $x \in \text{relint } F$. Daraus ergibt sich unmittelbar $N(P, F) = \{x_0\} \in \mathcal{S}_0$ für $S_0 \in \mathcal{S}_0$ und $\gamma(F, P) = \frac{1}{2}$ für alle $F \in \mathcal{F}_1(P)$, womit die Behauptung folgt. □

Aus der sphärischen Steiner-Formel kann man ebenfalls ablesen, dass die sphärischen inneren Volumina normiert sind, d.h., es gilt $\mu_j(S_j) = 1$ für alle $S_j \in \mathcal{S}_j$ mit $j \in \{0, 1, 2\}$. Dazu erfüllt jedes sphärische innere Volumen μ_j , $j \in \{0, 1, 2\}$, die Eigenschaft

$$\sigma_j(S) = (j+1)\kappa_{j+1}\mu_j(S)$$

für alle $S \subset S_j$ mit $S_j \in \mathcal{S}_j$. Wir definieren zusätzlich $\mu_j(\emptyset) = 0$ für alle $j \in \{0, 1, 2\}$.

Satz 6.3 ([63, Theorem 6.5.2]). *Für $j \in \{0, 1, 2\}$ besitzt das innere Volumen μ_j die folgenden Eigenschaften:*

(a) μ_j ist rotationsinvariant, d.h., $\mu_j(\vartheta K) = \mu_j(K)$ für alle $\vartheta \in SO_3$ und $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$.

(b) Die Konvergenz $K_n \rightarrow K$ im Sinne der Hausdorff-Metrik auf $\mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ impliziert

$$\mu_j(K_n) \rightarrow \mu_j(K), \quad n \rightarrow \infty,$$

für alle $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ und $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$.

(c) μ_j ist additiv, d.h., es gilt $\mu_j(\emptyset) = 0$ und

$$\mu_j(K_1 \cup K_2) = \mu_j(K_1) + \mu_j(K_2) - \mu_j(K_1 \cap K_2)$$

für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ mit $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$.

□

Bemerkung 6.4. Es gibt eine eindeutige Fortsetzung der sphärischen inneren Volumina auf $\mathcal{R}(\mathcal{S}^2)$, die die Eigenschaften (a) und (c) aus Satz 6.3 übernehmen, vgl. dazu [63, Section 6.5].

Um eine weitere Eigenschaft über die sphärischen inneren Volumina vorzustellen, benötigen wir das zusätzliche sphärische innere Volumen

$$\mu_{-1}(K) := \mu_2(K^*), \quad K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2).$$

Satz 6.5 ([63, Theorem 6.5.5]). Es gilt

$$\sum_{j=-1}^2 \mu_j(K) = 1$$

für alle $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ und falls $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2) \setminus (\bigcup_{j=0}^2 \mathcal{S}_j)$, erhält man

$$\sum_{j=-1}^2 (-1)^j \mu_j(K) = 0,$$

und somit

$$\mu_0(K) + \mu_2(K) = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung 6.6. Der letzte Satz impliziert insbesondere, dass für $S_k \in \mathcal{S}_k$, $k \in \{0, 1, 2\}$, $\mu_j(S_k) = 0$ für alle $j \in \{-1, \dots, 2\}$ mit $j \neq k$ gilt. Andererseits liefert dieser Satz kombiniert mit [63, Theorem 14.4.2], dass μ_0 nicht die Euler-Charakteristik $\chi_{\mathcal{S}^2}$ auf \mathcal{S}^2 ist. Nämlich es gilt unter Berücksichtigung von [63, Section 6.5], dass

$$\chi_{\mathcal{S}^2}(K) = 2(\mu_0(K) + \mu_2(K)) \tag{6.2}$$

für alle $K \in \mathcal{R}(\mathcal{S}^2)$ und $\chi_{\mathcal{S}^2}(K) = 1$ für alle $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$, die in einer offenen Halbsphäre liegen, gilt.

Als Nächstes stellen wir ein Analogon zum Satz von Hadwiger im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 , siehe Satz 2.5, vor. Der folgende Satz beschränkt sich nur auf $\mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$, da die Existenz des Satzes auf $\mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ noch nicht geklärt ist und zurzeit ein offenes Problem darstellt.

Satz 6.7 ([35, Theorem 11.3.1]). *Falls $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{S}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ ein bzgl. der Hausdorff-Metrik auf $\mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ stetiges, rotationsinvariantes und additives Funktional beschreibt, dann existieren Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass*

$$\varphi(P) = \alpha_0 \mu_0(P) + \alpha_1 \mu_1(P) + \alpha_2 \mu_2(P)$$

für alle $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ gilt.

Bemerkung 6.8. *Es ist zu erwähnen, dass Satz 6.7 zunächst für die in [35, Section 11] definierten inneren Volumina φ_0, φ_1 und φ_2 , die nicht mit den hier vorgestellten inneren Volumina übereinstimmen, gültig ist. Mit anderen Worten existieren für jedes Funktional $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{S}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, welches ein bzgl. der Hausdorff-Metrik auf $\mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ stetiges, rotationsinvariantes und additives Funktional beschreibt, Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass*

$$\varphi(P) = \alpha_0 \varphi_0(P) + \alpha_1 \varphi_1(P) + \alpha_2 \varphi_2(P) \quad (6.3)$$

für alle $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ gilt. Zusätzlich gilt nach [35, Section 11] die folgende Tabelle

	$\{s_0\}$	S_1	\mathcal{S}^2
φ_0	1	0	2
φ_1	0	2π	0
φ_2	0	0	4π

für alle $s_0 \in \mathcal{S}^2$ und $S_1 \in \mathcal{S}_1$. Wir werden jetzt sehen, dass wir die inneren Volumina μ_0, μ_1 und μ_2 mithilfe der Funktionale φ_0, φ_1 und φ_2 darstellen können. Nach (6.3) existieren für alle $j \in \{0, 1, 2\}$ Konstanten $\alpha_{j,0}, \alpha_{j,1}, \alpha_{j,2} \in \mathbb{R}$ mit

$$\mu_j(P) = \alpha_{j,0} \varphi_0(P) + \alpha_{j,1} \varphi_1(P) + \alpha_{j,2} \varphi_2(P)$$

für alle $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$. Wegen der Normierung von μ_1 und μ_2 und Bemerkung 6.6 folgt unmittelbar, dass

$$\mu_1(P) = \frac{\varphi_1(P)}{2\pi}, \quad \mu_2(P) = \frac{\varphi_2(P)}{4\pi}$$

für alle $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ gilt. Für $j = 0$ erhalten wir für alle $s_0 \in \mathcal{S}^2$

$$\frac{1}{2} = \mu_0(\{s_0\}) = \alpha_{0,0}.$$

Offensichtlich liefert Bemerkung 6.6 $\alpha_{0,1} = 0$. Schließlich erhält man mit

$$0 = \mu_0(\mathcal{S}^2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \alpha_{0,2} 4\pi$$

die Beziehung

$$\mu_0(P) = \frac{1}{2}\varphi_0(P) - \frac{1}{4\pi}\varphi_2(P)$$

für alle $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$. Nebenbei schließen wir aus (6.2), dass insbesondere $\chi_{\mathcal{S}^2}(P)$ die Euler-Charakteristik von P ist, falls P in einer offenen Halbsphäre liegt. Tatsächlich ist φ_0 die Euler-Charakteristik auf \mathcal{S}^2 .

Trotzdem haben wir uns dazu entschlossen, die inneren Volumina μ_0, μ_1 und μ_2 basierend auf Satz 6.1 bzw. [63, Section 6.5] zu definieren, da dort wie in Satz 2.1 die (sphärische) Steiner-Formel als Zugang zu den inneren Volumina gewählt wird.

Als Nächstes werden wir die sphärische Crofton-Formel für $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ als Pendant zur euklidischen Version aus Korollar 2.6 vorstellen. Dafür bezeichnen wir mit τ_1 das eindeutig bestimmte, rotationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{S}_1 . Das Maß τ_1 kann folgendermaßen aus dem normierten sphärischen Lebesgue-Maß ν_1 , das Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{S}^2 , hergeleitet werden. Zu $u \in \mathcal{S}^2$ betrachtet man den zugehörigen (äußeren) Normaleneinheitsvektor n_u . Schneidet man die durch den Normaleneinheitsvektor n_u eindeutig bestimmte lineare Ebene mit \mathcal{S}^2 , so ist dieser Durchschnitt ein Großkreis.

Satz 6.9 (Sphärische Crofton-Formel). *Es gilt*

$$\int_{\mathcal{S}_1} \mu_0(P \cap S) d\tau_1(S) = \mu_1(P) \quad (6.4)$$

und

$$\int_{\mathcal{S}_1} \mu_1(P \cap S) d\tau_1(S) = \mu_2(P) \quad (6.5)$$

für alle $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$.

Beweis. Wir werden die Formeln aus (6.4) und (6.5) unter Verwendung von Satz 6.7 zeigen. Die linke Seite in (6.4) kann als ein Funktional $\hat{\varphi}_1$ auf $\mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ in der Form

$$\hat{\varphi}_1(P) := \int_{\mathcal{S}_1} \mu_0(P \cap S) d\tau_1(S)$$

aufgefasst werden. Offensichtlich erbt $\hat{\varphi}_1$ die Additivität und Rotationsinvarianz von μ_0 aus Satz 6.3. Die Stetigkeit folgt ebenfalls aus diesem Satz kombiniert mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Daher liefert der Satz 6.7 Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\hat{\varphi}_1$ der Gleichung

$$\hat{\varphi}_1(P) = \alpha_0\mu_0(P) + \alpha_1\mu_1(P) + \alpha_2\mu_2(P)$$

genügt. Wegen der Normierung der sphärischen inneren Volumina und Bemerkung 6.6 erhalten wir für $P = S_0 \in \mathcal{S}_0$

$$\alpha_0 = \hat{\varphi}_1(S_0) = \int_{\mathcal{S}_1} \mu_0(S_0 \cap S) d\tau_1(S) = 0,$$

für $P = S_1 \in \mathcal{S}_1$

$$\alpha_1 = \hat{\varphi}_1(S_1) = \int_{\mathcal{S}_1} \mu_0(S_1 \cap S) d\tau_1(S) = 1$$

und für $P = \mathcal{S}^2$

$$\alpha_2 = \hat{\varphi}_1(\mathcal{S}^2) = \int_{\mathcal{S}_1} \mu_0(\mathcal{S}^2 \cap S) d\tau_1(S) = 0.$$

Mit der gleichen Argumentation ist

$$\hat{\varphi}_2(P) := \int_{\mathcal{S}_1} \mu_1(P \cap S) d\tau_1(S), \quad P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2),$$

ein stetiges, rotationsinvariantes und additives Funktional auf $\mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ und erfüllt die Gleichung

$$\hat{\varphi}_2(P) = \beta_0 \mu_0(P) + \beta_1 \mu_1(P) + \beta_2 \mu_2(P), \quad P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2),$$

für Konstanten $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Wie oben zeigt man, dass $\beta_0 = \beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 1$ gilt. \square

Bemerkung 6.10. Eine Erweiterung der sphärischen Crofton-Formel für $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ (sogar für $K \in \mathcal{R}(\mathcal{S}^2)$) kann in [63, Section 6.5] gefunden werden.

Für eine Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^2)$ schreiben wir im Folgenden

$$[B] := \{S \in \mathcal{S}_1 : B \cap S \neq \emptyset\}.$$

Korollar 6.11. Falls $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ keinen Großkreis enthält, dann gilt

$$\tau_1([K]) = 2\mu_1(K).$$

Beweis. Kombinieren wir die sphärische Crofton-Formel aus (6.4) für $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$, siehe Bemerkung 6.10, mit (6.2), dann haben wir

$$\begin{aligned} \tau_1([K]) &= \int_{\mathcal{S}_1} \mathbb{1}_{\{K \cap S \neq \emptyset\}} d\tau_1(S) = \int_{\mathcal{S}_1} \chi_{\mathcal{S}^2}(K \cap S) d\tau_1(S) \\ &= 2 \int_{\mathcal{S}_1} \mu_0(K \cap S) + \mu_2(K \cap S) d\tau_1(S) = 2\mu_1(K), \end{aligned}$$

da wegen der Additivität und Bemerkung 6.6

$$0 \leq \mu_2(K \cap S) \leq \mu_2(S) = 0$$

für alle $S \in \mathcal{S}_1$ gilt. \square

6.2 Konstruktion von MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2

Bevor wir die Konstruktion von MNW-Mosaik vorstellen können, werden wir zunächst die Definition eines Mosaiks auf \mathcal{S}^2 liefern. Mit $\mathcal{P}_0(\mathcal{S}^2)$ bezeichnen wir das Mengensystem aller $P \in \mathcal{P}(\mathcal{S}^2)$ mit $\text{int } P \neq \emptyset$ und nennen ihre Elemente Zellen. Zusätzlich definiert $\mathcal{F}(\mathcal{S}^2)$ das System der abgeschlossenen Teilmengen von \mathcal{S}^2 , und $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{S}^2))$ ist die Spur- σ -Algebra von \mathcal{F}^3 über $\mathcal{F}(\mathcal{S}^2)$.

Definition 6.12. *Es sei \hat{T} eine endliche Teilmenge von $\mathcal{P}_0(\mathcal{S}^2)$ gegeben, so dass*

- (a) $\text{int } c \cap \text{int } c' = \emptyset$ gilt, falls $c, c' \in \hat{T}$ mit $c \neq c'$ gilt,
- (b) die Zellen von \hat{T} die Einheitssphäre \mathcal{S}^2 überdecken, d.h.,

$$\bigcup_{c \in \hat{T}} c = \mathcal{S}^2.$$

Dann ist

$$T := \bigcup_{c \in \hat{T}} \partial c \in \mathcal{F}(\mathcal{S}^2)$$

ein Mosaik auf \mathcal{S}^2 . Ferner bezeichnen wir mit \hat{T} die assoziierte Zellenmenge zu T .

Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}(\mathcal{S}^2) \subset \mathcal{F}(\mathcal{S}^2)$ den Raum aller Mosaik auf \mathcal{S}^2 und statt $\mathcal{T}(\mathcal{S}^2)$ mit der Spur- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{T}(\mathcal{S}^2))$ von $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{S}^2))$ über $\mathcal{T}(\mathcal{S}^2)$ aus. Für einen zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist ein zufälliges Mosaik auf \mathcal{S}^2 durch eine $(\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathcal{T}(\mathcal{S}^2)))$ -messbare Abbildung von Ω nach $\mathcal{T}(\mathcal{S}^2)$ definiert.

Überdies definieren wir für $T \in \mathcal{T}(\mathcal{S}^2)$, $c \in \hat{T}$ und $S \in [c]$ das Mosaik $\mathcal{O}_{c,S}(T) \in \mathcal{T}(\mathcal{S}^2)$ durch

$$\mathcal{O}_{c,S}(T) := T \cup (c \cap S).$$

Anders ausgedrückt, ist $\mathcal{O}_{c,S}(T)$ das Mosaik, das aus T entsteht, wenn die Zelle c durch den Großkreis S in zwei Zellen geteilt wird.

Für die Definition des MNW-Mosaiks auf \mathcal{S}^2 zerlegen wir \mathcal{S}^2 in die Halbsphären $\mathcal{S}_+^2 := \{(x, y, z) \in \mathcal{S}^2 : z \geq 0\}$ und $\mathcal{S}_-^2 := \{(x, y, z) \in \mathcal{S}^2 : z \leq 0\}$ und bezeichnen mit $\mathbb{A} := \mathcal{S}_+^2 \cap \mathcal{S}_-^2$ den Äquator von \mathcal{S}^2 . Für das notwendige Hintergrundwissen der Theorie der Markoff-Prozesse verweisen wir auf [31, Chapter 8].

Definition 6.13. *Unter einem MNW-Mosaik-Prozess mit der Initialisierung $Y_{\mathcal{S}^2}(0) := \mathbb{A}$ versteht man den zeitstetigen Markoff-Prozess $(Y_{\mathcal{S}^2}(t))_{t \geq 0}$ auf $\mathcal{T}(\mathcal{S}^2)$, dessen infinitesimaler Generator $\mathbb{L}_{\mathcal{S}^2}$ für beschränkte und messbare Funktionen $F : \mathcal{T}(\mathcal{S}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ durch*

$$\mathbb{L}_{\mathcal{S}^2} F(T) := \sum_{c \in \hat{T}} \int_{[c]} [F(\mathcal{O}_{c,S}(T)) - F(T)] d\tau_1(S), \quad T \in \mathcal{T}(\mathcal{S}^2), \quad (6.6)$$

gegeben ist.

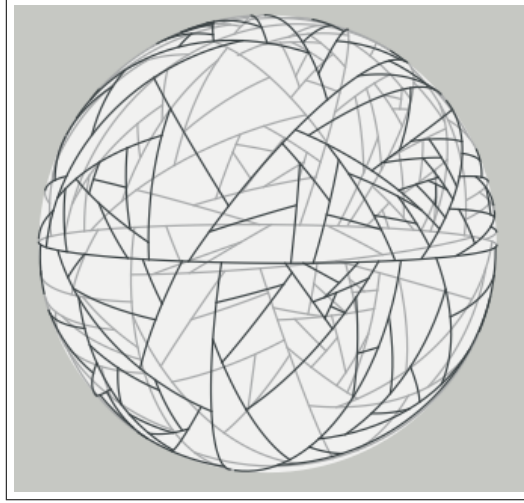


Abbildung 6.1: Realisierung eines MNW-Mosaiks $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ auf \mathcal{S}^2 .

Der Prozess $(Y_{\mathcal{S}^2}(t))_{t \geq 0}$ kann analog zum euklidischen Fall beschrieben werden, siehe Abschnitt 2.4. Wir starten zur Zeit $t = 0$ mit den zwei Zellen \mathcal{S}_+^2 und \mathcal{S}_-^2 , die durch den Äquator \mathbb{A} voneinander getrennt werden. Zusätzlich besitzen \mathcal{S}_+^2 und \mathcal{S}_-^2 unabhängig voneinander exponentialverteilte Lebenszeiten L_+ und L_- mit den Parametern $\tau_1([\mathcal{S}_+^2]) = \tau_1([\mathcal{S}_-^2]) = 1$. Ohne Einschränkung ist $L_+ < L_-$ gegeben. Falls nun die Lebenszeit L_+ abgelaufen ist, so wird gemäß der (bedingten) Verteilung

$$\tau_1(\cdot \mid [\mathcal{S}_+^2]) := \frac{\tau_1(\cdot \cap [\mathcal{S}_+^2])}{\tau_1([\mathcal{S}_+^2])} = \tau_1(\cdot \cap [\mathcal{S}_+^2]) = \tau_1$$

ein Großkreis $S \in \mathcal{S}_1$ zufällig ausgewählt, welcher \mathcal{S}_+^2 in zwei Zellen $\mathcal{S}_+^2 \cap S^+$ und $\mathcal{S}_+^2 \cap S^-$ trennt. Dabei sind S^+ und S^- die durch S eindeutig charakterisierten Halbsphären. Dann haben $\mathcal{S}_+^2 \cap S^+$ und $\mathcal{S}_+^2 \cap S^-$ ebenfalls unabhängig voneinander exponentialverteilte Lebenszeiten mit den Parametern $\tau_1([\mathcal{S}_+^2 \cap S^+]) = 1$ und $\tau_1([\mathcal{S}_+^2 \cap S^-]) = 1$ und die Konstruktion wird in jeder Zelle rekursiv fortgeführt.

Definition 6.14. *Unter einem MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2 mit Parameter $t > 0$ verstehen wir das zufällige Mosaik $Y_{\mathcal{S}^2}(t) \in \mathcal{T}(\mathcal{S}^2)$.*

Eine Realisierung eines MNW-Mosaiks $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ auf \mathcal{S}^2 ist durch die Abbildung 6.1 gegeben. Der Name MNW-Mosaik führt auf die Erfinder Mecke, Nagel und Weiß der Konstruktion von STIT Mosaik zurück, welche wir im Wesentlichen hier auch verwendet haben. Dabei wäre das Attribut STIT hier irreführend, weil MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2 diese Eigenschaft nicht erfüllen.

6.3 Eigenschaften von MNW-Mosaiken auf \mathcal{S}^2

Wir betrachten im Folgenden Zellfunktionale auf $\mathcal{T}(\mathcal{S}^2)$ in der Form

$$\Sigma_\phi(T) := \sum_{c \in \hat{T}} \phi(c), \quad T \in \mathcal{T}(\mathcal{S}^2), \quad (6.7)$$

wobei $\phi : \mathcal{P}(\mathcal{S}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ ein beschränktes und messbares Funktional beschreibt. Die Martingaleigenschaft für Funktionale von lokalen STIT-Mosaiken aus Lemma 2.23 kann analog auch für Zellfunktionale von MNW-Mosaiken auf \mathcal{S}^2 formuliert werden.

Lemma 6.15. *Der stochastische Prozess*

$$\left(\Sigma_\phi(Y_{\mathcal{S}^2}(t)) - \Sigma_\phi(Y_{\mathcal{S}^2}(0)) - \int_0^t \mathbb{L}_{\mathcal{S}^2} \Sigma_\phi(Y_{\mathcal{S}^2}(s)) \, ds \right)_{t \geq 0}$$

definiert für ein beschränktes und messbares Funktional $\phi : \mathcal{P}(\mathcal{S}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Martingal bzgl. der von $(Y_{\mathcal{S}^2}(s))_{0 \leq s \leq t}$ induzierten Filtrierung, wobei $\mathbb{L}_{\mathcal{S}^2}$ der Generator aus Definition 6.13 ist.

Beweis. Mit der Beweistechnik aus [66, Proposition 1] kann die Aussage analog gezeigt werden. \square

Offensichtlich definiert $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ per Konstruktion für alle $t \geq 0$ eine zufällige abgeschlossene Menge in \mathbb{R}^3 . Ihr Kapazitätsfunktional ist gemäß Definition 2.10 durch

$$T_{Y_{\mathcal{S}^2}(t)}(C) := \mathbb{P}_{Y_{\mathcal{S}^2}(t)}(\mathcal{F}_C^3) = \mathbb{P}(Y_{\mathcal{S}^2}(t) \cap C \neq \emptyset), \quad C \in \mathcal{C}^3 \cap \mathcal{S}^2,$$

gegeben. Eine direkte Anwendung von Lemma 6.15 bestimmt das Kapazitätsfunktional $T_{Y_{\mathcal{S}^2}(t)}$ von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ für zusammenhängende Mengen $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$, die die Eigenschaft $K \subset \text{int } \mathcal{S}_\pm^2$ erfüllen.

Lemma 6.16. *Unter der Bedingung, dass $K \in \mathcal{K}(\mathcal{S}^2)$ mit $K \subset \text{int } \mathcal{S}_\pm^2$ ist, gilt für $t > 0$*

$$1 - T_{Y_{\mathcal{S}^2}(t)}(K) = \mathbb{P}(Y_{\mathcal{S}^2}(t) \cap K = \emptyset) = e^{-t\tau_1([K])} = e^{-2t\mu_1(K)}. \quad (6.8)$$

Beweis. Ohne Einschränkung gilt $K \subset \text{int } \mathcal{S}_+^2$. Nach Lemma 6.15 wissen wir, dass der stochastische Prozess

$$\left(\Sigma_\phi(Y_{\mathcal{S}^2}(t)) - \Sigma_\phi(Y_{\mathcal{S}^2}(0)) - \int_0^t \mathbb{L}_{\mathcal{S}^2} \Sigma_\phi(Y_{\mathcal{S}^2}(s)) \, ds \right)_{t \geq 0}$$

für $\phi(c) = \mathbb{1}_{\{K \subset c\}}$ ein Martingal bzgl. der von $(Y_{S^2}(s))_{0 \leq s \leq t}$ induzierten Filtrierung ist. Die Martingaleigenschaft führt uns mithilfe des Satzes von Fubini zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{S^2}(t) \cap K = \emptyset) &= \mathbb{E}[\Sigma_\phi(Y_{S^2}(t))] = \mathbb{E}[\Sigma_\phi(Y_{S^2}(0))] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{L}\Sigma_\phi(Y_{S^2}(s)) \, ds\right] \\
&= 1 + \int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_{S^2}(s)} \int_{[c]} \Sigma_\phi(\mathcal{O}_{c,S}(Y_{S^2}(s))) - \Sigma_\phi(Y_{S^2}(s)) \, d\tau_1(S)\right] \, ds \\
&= 1 + \int_0^t \mathbb{E}\left[-\sum_{c \in \hat{Y}_{S^2}(s)} \int_{[c]} \mathbb{1}_{\{K \subset c\}} \mathbb{1}_{\{K \cap S \neq \emptyset\}} \, d\tau_1(S)\right] \, ds \\
&= 1 - \int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_{S^2}(s)} \mathbb{1}_{\{K \subset c\}} \int_{[c]} \mathbb{1}_{\{K \cap S \neq \emptyset\}} \, d\tau_1(S)\right] \, ds \\
&= 1 - \tau_1([K]) \int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_{S^2}(s)} \mathbb{1}_{\{K \subset c\}}\right] \, ds \\
&= 1 - \tau_1([K]) \int_0^t \mathbb{P}(Y_{S^2}(s) \cap K = \emptyset) \, ds.
\end{aligned}$$

Dies liefert die lineare Integralgleichung

$$y(t) = 1 - \tau_1([K]) \int_0^t y(s) \, ds \quad \text{mit } y(0) = 1,$$

welche die eindeutige Lösung $y(t) = e^{-t\tau_1([K])}$ besitzt. Wegen $\tau_1([K]) = 2\mu_1(K)$ nach Korollar 6.11 folgt die Behauptung. \square

Weiterhin können wir mithilfe des kommenden Lemmas festhalten, dass der Prozess $Y_{S^2_\pm}(t) \cap (S \setminus \mathbb{A})$ für einen Großkreis $S \in \mathcal{S}_1 \setminus \{\mathbb{A}\}$ einen Poissonschen Punktprozess mit Intensitätsmaß $t \cdot \tau_1|_{S^2_\pm \cap (S \setminus \mathbb{A})} := t \cdot \tau_1(\cdot \cap [S^2_\pm \cap (S \setminus \mathbb{A})])$ bildet. Dabei ist dieser Poissonsche Punktprozess als Analogon zu Definition 2.16 zu verstehen. Zudem bedeutet $\text{conv } A$ ab sofort die sphärische konvexe Hülle von $A \subset S^2$.

Lemma 6.17. *Es sei $S \in \mathcal{S}_1 \setminus \{\mathbb{A}\}$ ein beliebiger Großkreis. Dann sind die Punktprozesse $Y_{S^2_+}(t) \cap (S \setminus \mathbb{A})$ und $Y_{S^2_-}(t) \cap (S \setminus \mathbb{A})$ unabhängige Poissonsche Punktprozesse mit Intensitätsmaß $t \cdot \tau_1|_{S^2_\pm \cap (S \setminus \mathbb{A})}$.*

Beweis. Die Unabhängigkeit der beiden Prozesse folgt unmittelbar aus der Konstruktion der MNW-Mosaik. Ohne Einschränkung reicht es zu zeigen, dass $Y_{S^2_+}(t) \cap (S \setminus \mathbb{A})$ ein

Poissonscher Punktprozess mit Intensitätsmaß $t \cdot \tau_1|_{\mathcal{S}_+^2 \cap (S \setminus \mathbb{A})}$ ist. Nach [63, Theorem 3.6.3] müssen wir demnach die Gleichheit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^m \{Y_{\mathcal{S}^2}(t) \cap I_j = \emptyset\}\right) = \prod_{j=1}^m e^{-t\tau_1([I_j])} \quad (6.9)$$

für alle sphärischen Segmente $I_1, \dots, I_m \subset \mathcal{S}_+^2 \cap (S \setminus \mathbb{A})$ verifizieren. Dabei sind diese Segmente ohne Beschränkung der Allgemeinheit so angeordnet, dass für alle $j \in \{1, \dots, m-1\}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ mit $k \notin \{j, j+1\}$ die sphärische konvexe Hülle von I_j und I_{j+1} das Segment I_k nicht enthält. Allerdings enthält die sphärische konvexe Hülle von I_m und I_1 alle Segmente I_k , $k \in \{2, \dots, m-1\}$. Die Richtigkeit von (6.9) werden wir mit vollständiger Induktion belegen. Für $m = 1$ ist dies gerade Lemma 6.16. Für $m \geq 2$ gilt mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von [51, Lemma 4]

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^m \{Y_{\mathcal{S}^2}(t) \cap I_j = \emptyset\}\right) &= e^{-t\tau_1([I])} + t \sum_{Z_1, Z_2} \tau_1([Z_1 | Z_2]) \int_0^1 e^{-t\tau_1([I])s} \\ &\quad \times G(t(1-s), Z_1)G(t(1-s), Z_2) ds \end{aligned} \quad (6.10)$$

mit

$$G(v, Z) := \mathbb{P}(Y_{\mathcal{S}^2}(v) \cap Z = \emptyset), \quad v \geq 0, Z \subset \mathcal{S}_+^2 \cap (S \setminus \mathbb{A}),$$

wobei I die sphärische konvexe Hülle von I_1, \dots, I_m definiert und die Notationen aus Kapitel 3 zur Berechnung des Kapazitätsfunktional eines STIT Mosaiks in \mathbb{R}^d mit

$$[Z_1 | Z_2] := \{S_1 \in \mathcal{S}_1 : Z_1 \cap S_1 = Z_2 \cap S_2 = \emptyset, \text{conv}(Z_1 \cup Z_2) \cap S_1 \neq \emptyset\}$$

gelten sollen. Die Terme in (6.10) lassen sich wie folgt berechnen. Aufgrund der Tatsache, dass Z_1 und Z_2 weniger als m Elemente enthält, gilt per Induktionsannahme für $J \subset \{1, \dots, m\}$ mit $1 \leq \text{card } J < m$

$$G(t(1-s), Z_1) = \prod_{j \in J} e^{-t(1-s)\tau_1([I_j])} \quad \text{und} \quad G(t(1-s), Z_2) = \prod_{j \in J^c} e^{-t(1-s)\tau_1([I_j])}$$

und somit

$$G(t(1-s), Z_1)G(t(1-s), Z_2) = \prod_{j=1}^m e^{-t(1-s)\tau_1([I_j])}.$$

Für $j \in \{1, \dots, m-1\}$ bezeichnen wir mit $I_{j,j+1}$ das sphärische Intervall auf $\mathcal{S}_+^2 \cap (S \setminus \mathbb{A})$, welches sich zwischen I_j und I_{j+1} befindet. Dann sieht man leicht, dass

$$\tau_1([I]) = \tau_1([I_1]) + \dots + \tau_1([I_m]) + \tau_1([I_{1,2}]) + \dots + \tau_1([I_{m-1,m}])$$

gilt. Dies impliziert unmittelbar

$$e^{-t\tau_1([I])s} G(t(1-s), Z_1)G(t(1-s), Z_2) = e^{-t \sum_{j=1}^m \tau_1([I_j])s} e^{-ts \sum_{j=1}^{m-1} \tau_1([I_{j,j+1}])s}$$

und somit erhalten wir für das Integral in (6.10)

$$\frac{1}{t \sum_{j=1}^{m-1} \tau_1([I_{j,j+1}])} \left(1 - e^{-t \sum_{j=1}^{m-1} \tau_1([I_{j,j+1}])} \right) e^{-t \sum_{j=1}^m \tau_1([I_j])},$$

welches unabhängig von der Wahl von Z_1 und Z_2 ist. Da für alle Z_1 und Z_2 mit $\text{conv } Z_1 \cap \text{conv } Z_2 \neq \emptyset$ offensichtlich $\tau_1([Z_1 | Z_2]) = 0$ gilt, stimmt die Summe $\sum_{Z_1, Z_2} t \tau_1([Z_1 | Z_2])$ gerade mit dem Vorfaktor des letzten Ausdrucks überein. Dies liefert mit

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^m \{Y_{\mathcal{S}^2}(t) \cap I_j = \emptyset\} \right) &= e^{-t\tau_1([I])} + \left(1 - e^{-t \sum_{j=1}^{m-1} \tau_1([I_{j,j+1}])} \right) e^{-t \sum_{j=1}^m \tau_1([I_j])} \\ &= \prod_{j=1}^m e^{-t\tau_1([I_j])} \end{aligned}$$

die Behauptung. □

6.4 Mittelwerte von MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2

Um auf die Zellfunktionale aus (6.7) zurückzukommen, müssen wir zunächst einige Begriffe vorab definieren. Für ein MNW-Mosaik $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ auf \mathcal{S}^2 mit $t \geq 0$ nennen wir $v \in \mathcal{S}^2$ einen Knoten von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$, falls v eine Ecke von zwei Zellen $c_1, c_2 \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)$ mit $c_1 \neq c_2$ ist. Eine Kante von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ ist eine Teilmenge einer Seite $F \in \mathcal{F}_1(c)$ von einer Zelle $c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)$, die durch zwei Knoten begrenzt wird und im relativen Inneren keinen Knoten enthält. Ferner wird eine maximale Vereinigung von kollinearen Kanten, die nicht einen Großkreis charakterisieren, ein I-Segment genannt. Mit anderen Worten ist ein I-Segment dasjenige Segment, das bei der Teilung einer Zelle $c' \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(s)$ durch einen Großkreis S zu einer Zeit $s \leq t$ entsteht. Wir schreiben $\mathcal{V}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))$ für die Knotenmenge, $\mathcal{E}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))$ für die Kantenmenge und $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))$ für die Menge der I-Segmente von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$.

Wir interessieren uns als Erstes für die sphärische Gesamtlänge der I-Segmente, d.h. für das Funktional

$$\sum_{I \in \mathcal{I}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))} \sigma_1(I).$$

Da der Äquator \mathbb{A} kein I-Segment ist und eine Kante genau zu zwei Zellen gehört, können wir auch das Zellfunktional

$$\frac{1}{2} \sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} \sigma_1(\partial c) - 2\pi$$

untersuchen, welches der sphärische Gesamtlänge der I-Segmente entspricht.

Lemma 6.18. Die erwartete sphärische Gesamtlänge der I-Segmente von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ ist für alle $t \geq 0$ durch

$$\mathbb{E} \left[\sum_{I \in \mathcal{I}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))} \sigma_1(I) \right] = 2\pi t$$

gegeben und es gilt

$$\mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} \sigma_1(\partial c) \right] = 4\pi(t + 1).$$

Beweis. Wir wenden wieder das Lemma 6.15 an und erhalten mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} \sigma_1(\partial c) \right] \\ &= 4\pi + \int_0^t \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(s)} \int_{[c]} \sigma_1(\partial(c \cap S^+)) + \sigma_1(\partial(c \cap S^-)) - \sigma_1(\partial c) \, d\tau_1(S) \right] ds \\ &= 4\pi + 2 \int_0^t \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(s)} \int_{[c]} \sigma_1(c \cap S) \, d\tau_1(S) \right] ds \\ &= 4\pi + 4\kappa_2 \int_0^t \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(s)} \int_{[c]} \mu_1(c \cap S) \, d\tau_1(S) \right] ds. \end{aligned}$$

Die Anwendung der sphärischen Crofton-Formel aus (6.5) auf das innere Integral führt uns zu

$$4\pi + 4\pi \int_0^t \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(s)} \mu_2(c) \right] ds = 4\pi + 4\pi \int_0^t \mathbb{E} [\mu_2(\mathcal{S}^2)] ds = 4\pi + 4\pi t,$$

wobei wir abschließend die Definition von μ_2 und die eines Mosaiks auf \mathcal{S}^2 ausgenutzt haben. \square

Für $t = 1$ ergibt sich für die erwartete sphärische Gesamtlänge der I-Segmente der Wert 2π , welcher wie folgt interpretiert werden kann:

Per Konstruktion besitzen die Startzellen \mathcal{S}_+^2 und \mathcal{S}_-^2 zum Zeitpunkt $t = 0$ unabhängig voneinander exponentialverteilte Lebenszeiten mit Parameter 1. Mit anderen Worten erwartet man, dass beide Zellen eine Lebenszeit von $t = 1$ haben und dann geteilt werden. Dann hat jedes entstandene I-Segment automatisch die Länge π .

Ähnlich kann auch die sphärische Gesamtkantenlänge, welche durch das Funktional

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))} \sigma_1(e)$$

gegeben ist, berechnet werden. Hier müssen nur zwei Spezialfälle bedacht werden. Wenn bis zum Zeitpunkt t die Startzellen \mathcal{S}_+^2 und \mathcal{S}_-^2 nicht geteilt worden sind, so ist noch keine Kante entstanden. Falls zur Zeit t lediglich eine Startzelle gesplittet worden ist, werden alle Kanten von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ in dieser Zelle erzeugt. In der Notation von oben ergibt sich somit

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))} \sigma_1(e) = \sum_{I \in \mathcal{I}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))} \sigma_1(I) + 2\pi \mathbb{1}_{\{L_+ > t, L_- > t\}^c}.$$

Da wegen der Unabhängigkeit von L_+ und L_-

$$\mathbb{P}(\{L_+ > t, L_- > t\}^c) = 1 - \mathbb{P}(L_+ > t, L_- > t) = 1 - e^{-2t}$$

gilt, lässt sich nun folgendes Lemma formulieren.

Lemma 6.19. *Für den Erwartungswert der sphärischen Gesamtkantenlänge eines MNW-Mosaiks $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$, $t \geq 0$, auf \mathcal{S}^2 erhält man*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{e \in \mathcal{E}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))} \sigma_1(e) \right] = 2\pi(1 - e^{-2t} + t).$$

Als Nächstes beschäftigen wir uns mit der Anzahl der Zellen, die durch das Zellfunktional

$$\Sigma_1(Y_{\mathcal{S}^2}(t)) := \sum_{c \in \tilde{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} 1$$

repräsentiert wird.

Lemma 6.20. *Die erwartete Anzahl der Zellen eines MNW-Mosaiks $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ auf \mathcal{S}^2 ist für alle $t \geq 0$ durch*

$$\mathbb{E}[\Sigma_1(Y_{\mathcal{S}^2}(t))] = \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \tilde{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} 1 \right] = t^2 + 2t + 2$$

gegeben.

Beweis. Lemma 6.15 und der Satz von Fubini führen zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \tilde{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} 1 \right] &= 2 + \int_0^t \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \tilde{Y}_{\mathcal{S}^2}(s)} \int_{[c]} 1 \, d\tau_1(S) \right] ds = 2 + \int_0^t \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \tilde{Y}_{\mathcal{S}^2}(s)} \tau_1([c]) \right] ds \\ &= 2 + 2 \int_0^t \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \tilde{Y}_{\mathcal{S}^2}(s)} \mu_1(c) \right] ds, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Korollar 6.11 und $\tau_1([\mathcal{S}_+^2]) = 1$ verwendet haben. Mithilfe von Korollar 6.2 und Lemma 6.18 lässt sich Letzteres zu

$$2 + \int_0^t \frac{1}{2\pi} \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \tilde{Y}_{\mathcal{S}^2}(s)} \sigma_1(\partial c) \right] ds = 2 + \int_0^t 2s + 2 \, ds = t^2 + 2t + 2$$

vereinfachen. □

Korollar 6.21. Für die erwartete Anzahl der I-Segmente von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ ergibt sich

$$\mathbb{E}\left[\sum_{I \in \mathcal{I}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))} 1\right] = t(t+2) \quad (6.11)$$

und für die der Knoten von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{v \in \mathcal{V}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))} 1\right] = 2t(t+2). \quad (6.12)$$

Außerdem gilt für die erwartete Anzahl der Kanten von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{e \in \mathcal{E}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))} 1\right] = 3t(t+2). \quad (6.13)$$

Beweis. Das Mosaik $Y_{\mathcal{S}^2}(0)$ besitzt zwei Zellen, keine Knoten und keine I-Segmente und somit auch keine Kanten. Da bei jeder Geburt eines I-Segments eine Zelle in zwei neue Zellen geteilt wird und dabei zwei neue Knoten entstehen, folgt insgesamt mit Lemma 6.20 die Gleichungen (6.11) und (6.12). Weiterhin entstehen bei jeder Geburt eines I-Segments fünf neue Kanten, wogegen auch zwei Kanten eliminiert werden. Demnach folgt der Rest der Behauptung. \square

Wie oben schon beschrieben spielt der Äquator eine besondere Rolle. Deshalb interessieren wir uns im Folgenden für die erwartete Anzahl der Zellen, die eine Seite auf dem Äquator haben.

Lemma 6.22. Die erwartete Anzahl der Zellen, die eine Seite auf dem Äquator besitzen, ist durch

$$\mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} \mathbb{1}_{\{c \cap \mathbb{A} \neq \emptyset\}}\right] = 4t + 2e^{-t}$$

für alle $t \geq 0$ gegeben.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschränken wir uns auf die obere Halbsphäre \mathcal{S}_+^2 . Die Anwendung von Lemma 6.15 impliziert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}_+^2}(t)} \mathbb{1}_{\{c \cap \mathbb{A} \neq \emptyset\}}\right] &= 1 + \int_0^t \mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}_+^2}(s)} \int_{[c]} \mathbb{1}_{\{c \cap \mathbb{A} \cap S \neq \emptyset\}} d\tau_1(S)\right] ds \\ &= 1 + \int_0^t \mathbb{E}\left[(\mathbb{1}_{\{L_+ > s\}} + \mathbb{1}_{\{L_+ \leq s\}}) \sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}_+^2}(s)} \tau_1([c \cap \mathbb{A}])\right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \int_0^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{L_+ > s\}} \sum_{c \in \hat{Y}_{S^2_+}(s)} \tau_1([c \cap \mathbb{A}]) \right] ds \\
&\quad + \int_0^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{L_+ \leq s\}} \sum_{c \in \hat{Y}_{S^2_+}(s)} \tau_1([c \cap \mathbb{A}]) \right] ds.
\end{aligned}$$

Mit Korollar 6.11 ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{S^2_+}(t)} \mathbb{1}_{\{c \cap \mathbb{A} \neq \emptyset\}} \right] &= 1 + \int_0^t \mathbb{P}(L_+ > s) ds + \int_0^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{L_+ \leq s\}} \sum_{c \in \hat{Y}_{S^2_+}(s)} 2\mu_1(c \cap \mathbb{A}) \right] ds \\
&= 1 + \int_0^t e^{-s} ds + 2 \int_0^t \mathbb{P}(L_+ \leq s) ds \\
&= 1 + 1 - e^{-t} + 2 \int_0^t 1 - e^{-s} ds \\
&= 2 - e^{-t} + 2t - 2(1 - e^{-t}) = 2t + e^{-t}.
\end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung. \square

Zusätzlich können wir die erwartete Anzahl der Knoten und der Kanten von $Y_{S^2}(t)$ angeben, die der Äquator enthält.

Korollar 6.23. *Für die erwartete Knoten- und Kantenzahl von $Y_{S^2}(t)$ auf dem Äquator ergibt sich*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{v \in \mathcal{V}(Y_{S^2}(t))} \mathbb{1}_{\{v \in \mathbb{A}\}} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{e \in \mathcal{E}(Y_{S^2}(t))} \mathbb{1}_{\{e \subset \mathbb{A}\}} \right] = 4t$$

für alle $t \geq 0$.

Beweis. Es gilt offensichtlich fast sicher

$$\sum_{v \in \mathcal{V}(Y_{S^2}(t))} \mathbb{1}_{\{v \in \mathbb{A}\}} = \sum_{c \in \hat{Y}_{S^2}(t)} \mathbb{1}_{\{c \cap \mathbb{A} \neq \emptyset\}} - \mathbb{1}_{\{L_+ > t\}} - \mathbb{1}_{\{L_- > t\}}.$$

Für den ersten Summanden der rechten Seite wenden wir Lemma 6.22 an und bekommen

$$\mathbb{E} \left[\sum_{v \in \mathcal{V}(Y_{S^2}(t))} \mathbb{1}_{\{v \in \mathbb{A}\}} \right] = 4t + 2e^{-t} - 2\mathbb{P}(L_+ > t) = 4t.$$

Wegen

$$\sum_{v \in \mathcal{V}(Y_{S^2}(t))} \mathbb{1}_{\{v \in \mathbb{A}\}} = \sum_{e \in \mathcal{E}(Y_{S^2}(t))} \mathbb{1}_{\{e \subset \mathbb{A}\}} \quad \text{fast sicher,}$$

erhalten wir insgesamt die Behauptung. \square

Wir betrachten jetzt die Seiten und Ecken eines MNW-Mosaiks $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ auf \mathcal{S}^2 für ein $t \geq 0$. Die Menge

$$\mathcal{F}_j(Y_{\mathcal{S}^2}(t)) := \{(c, F_j) : c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t), F_j \in \mathcal{F}_j(c)\}$$

definiert für $j = 0$ die Ecken- und für $j = 1$ die Seitenmenge von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$. Unter der Berücksichtigung, dass ein Knoten $v \in \mathcal{V}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))$ zwei Ecken von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ erzeugt, ist die zu erwartende Anzahl an Ecken von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ durch

$$\mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} \sum_{F_0 \in \mathcal{F}_0(c)} 1 \right] = 4t(t+2) \quad (6.14)$$

gegeben. Für die Seitenanzahl von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ reicht es wegen

$$\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1(c)} 1 = \sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2_+}(t)} \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1(c)} 1 + \sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2_-}(t)} \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1(c)} 1 \quad (6.15)$$

und der Unabhängigkeit und Verteilungsgleichheit von $Y_{\mathcal{S}^2_+}(t)$ und $Y_{\mathcal{S}^2_-}(t)$ aus, ohne Einschränkung den ersten Summanden der rechten Seite zu untersuchen. Dazu bemerken wir, dass $Y_{\mathcal{S}^2_+}(0)$ genau aus einer Seite besteht und bei der ersten Zellteilung vier neue Seiten entstehen und eine Seite eliminiert wird. Bei jeder weiteren Zellteilung werden nun sechs neue Seiten generiert und zwei Seiten gelöscht. Demnach erhalten wir fast sicher

$$\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2_+}(t)} \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1(c)} 1 = 1 + \left[4 \left(\sum_{I \in \mathcal{I}(Y_{\mathcal{S}^2_+}(t))} 1 \right) - 1 \right] \mathbb{1}_{\{L_+ \leq t\}}.$$

Lemma 6.24. *Für die erwartete Seitenanzahl eines MNW-Mosaiks $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ für $t \geq 0$ ergibt sich*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1(c)} 1 \right] = 2(e^{-t} + 2t(t+2)).$$

Beweis. Wir erhalten unmittelbar aus Korollar 6.21

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2_+}(t)} \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1(c)} 1 \right] &= 1 + 4 \mathbb{E} \left[\left(\sum_{I \in \mathcal{I}(Y_{\mathcal{S}^2_+}(t))} 1 \right) \mathbb{1}_{\{L_+ \leq t\}} \right] - \mathbb{P}(L_+ \leq t) \\ &= 1 + 4 \left(\frac{1}{2} t(t+2) \right) - (1 - e^{-t}) = e^{-t} + 2t(t+2) \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. Zusammen mit (6.15) folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 6.25. *Der Beweis in Lemma 6.22 in Verbindung mit Korollar 6.23 hat ebenso gezeigt, dass die erwartete Anzahl der Ecken von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ auf dem Äquator durch*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} \sum_{F_0 \in \mathcal{F}_0(c)} \mathbb{1}_{\{F_0 \in \mathbb{A}\}} \right] = 8t$$

und die der Seiten von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ auf dem Äquator durch

$$\mathbb{E} \left[\sum_{c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)} \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1(c)} \mathbb{1}_{\{F_1 \subset A\}} \right] = 4t + 2e^{-t}$$

für alle $t \geq 0$ gegeben sind.

Wir schreiben kurz $\mathcal{V}, \mathcal{E}, \hat{Y}, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ und \mathcal{I} für $\mathcal{V}(Y_{\mathcal{S}^2}(t)), \mathcal{E}(Y_{\mathcal{S}^2}(t)), \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t), \mathcal{F}_0(Y_{\mathcal{S}^2}(t)), \mathcal{F}_1(Y_{\mathcal{S}^2}(t))$ und $\mathcal{I}(Y_{\mathcal{S}^2}(t))$ und bezeichnen mit $\lambda_X := \mathbb{E}[\sum_{x \in X} 1]$ die Intensität für alle $X \in \mathcal{X} := \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \hat{Y}, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{I}\}$. Zudem nennen wir $x \in X$ ein Objekt von $X \in \mathcal{X}$. Insgesamt haben wir den folgenden Satz gezeigt.

Satz 6.26. Für $X \in \mathcal{X}$ ergeben sich die Intensitäten

X	\mathcal{V}	\mathcal{E}	\hat{Y}	\mathcal{F}_0	\mathcal{F}_1	\mathcal{I}
λ_X	$2t(t+2)$	$3t(t+2)$	$t^2 + 2t + 2$	$4t(t+2)$	$2(e^{-t} + 2t(t+2))$	$t(t+2)$

für alle $t \geq 0$.

Nun möchten wir das typische Objekt einer Klasse $X \in \mathcal{X}$ einführen, indem wir das in [58] vorgestellte Konzept der Palm-Verteilung verwenden. Dazu bemerken wir zunächst, dass \mathcal{S}^2 ein homogener Raum ist, den man als Quotientenraum SO_3/SO_2 identifizieren kann. Dabei wirkt die Rotationsgruppe SO_3 transitiv auf \mathcal{S}^2 , da für alle $s_1, s_2 \in \mathcal{S}^2$ ein $\vartheta \in SO_3$ mit $\vartheta s_1 = s_2$ existiert. Weiterhin ist der Stabilisator des Nordpols $e_3 = (0, 0, 1)$

$$SO_3(e_3) := \{\vartheta \in SO_3 : \vartheta e_3 = e_3\}$$

offensichtlich isomorph zu SO_2 . Dann definiert $\phi : SO_3 \circ e_3 \rightarrow SO_3, s = \vartheta e_3 \mapsto \vartheta$, mit

$$SO_3 \circ e_3 := \{\vartheta e_3 : \vartheta \in SO_3\} = \mathcal{S}^2$$

einen Gruppenhomomorphismus und somit ist \mathcal{S}^2 isomorph zu SO_3/SO_2 . Nach [29, Abschnitt 3.4] charakterisiert \mathcal{S}^2 dann einen homogenen Raum. Für jede Klasse $X \in \mathcal{X}$ betrachten wir eine Funktion $M_X : X \rightarrow \mathcal{S}^2$, so dass $M_X(\vartheta x) = M_X(x)$ für alle $\vartheta \in SO_3$ und für alle $x \in X$ gilt. Für $X \in \{\mathcal{V}, \mathcal{F}_0\}$ wählen wir die Identität $M_X = \text{id}$, für $X \in \{\mathcal{E}, \mathcal{F}_1, \mathcal{I}\}$ die übliche Mittelpunktfunktion. Zudem favorisieren wir für den Fall $X = \hat{Y}$ die Funktion M_X , die jeder Zelle $c \in \hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)$ den Mittelpunkt $M_X(c)$ der kleinsten Kugelkappe zuordnet, in der sich c befindet.

Dazu studieren wir den Prozess

$$\xi_X := \{M_X(x) : x \in X\}$$

mit Intensität $\mathbb{E}[\text{card } \xi_X] = \lambda_X < \infty$. Abschließend benötigen wir für $x \in \mathcal{S}^2$ die Menge $\Theta_x := \{\vartheta \in SO_3 : \vartheta e_3 = x\}$ und das invariante Wahrscheinlichkeitsmaß ν_{e_3} auf Θ_{e_3}

und bezeichnen mit $\nu_x := \nu_{e_3} \circ \vartheta^{-1}$ das Bildmaß ν_{e_3} bzgl. ϑ für ein beliebiges $\vartheta \in \Theta_x$. Dabei spielt die Wahl von ϑ aufgrund der Invarianz von ν_{e_3} keine Rolle. Gemäß [58] ist die Palm-Verteilung \mathbb{P}_X^0 von $Y_{\mathcal{S}^2}(t)$ bzgl. X das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{T}(\mathcal{S}^2), \mathcal{B}(\mathcal{T}(\mathcal{S}^2)))$ mit

$$\mathbb{P}_X^0(A) := \lambda_X^{-1} \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \xi_X} \int_{\Theta_x} \mathbb{1}_{\{\vartheta^{-1} Y_{\mathcal{S}^2}(t) \in A\}} d\nu_x(\vartheta) \right], \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{T}(\mathcal{S}^2)). \quad (6.16)$$

Unter der Palm-Verteilung $\mathbb{P}_{\hat{Y}}^0$ ist der Nordpol stets der Mittelpunkt einer Zelle, welche wir die typische Zelle von \hat{Y} nennen. Analog werden die typischen Objekte für die restlichen Klassen von \mathcal{X} definiert.

Falls $X \in \{\mathcal{E}, \mathcal{F}_1, \mathcal{I}\}$ ist, bezeichnen wir mit ℓ_X die erwartete sphärische Länge des typischen Objekts von X . Außerdem kennzeichnen $\ell_{\partial \hat{Y}}$ und $a_{\hat{Y}}$ den erwarteten sphärischen Umfang und die erwartete sphärische Fläche der typischen Zelle von $\hat{Y}_{\mathcal{S}^2}(t)$.

Satz 6.27. Für $t > 0$ ist $a_{\hat{Y}} = \frac{4\pi}{t^2+t+2}$ und ℓ_X ist für $X \in \{\mathcal{E}, \partial \hat{Y}, \mathcal{F}_1, \mathcal{I}\}$ durch

X	\mathcal{E}	$\partial \hat{Y}$	\mathcal{F}_1	\mathcal{I}
ℓ_X	$\frac{2\pi(1-e^{-2t}+t)}{3(t^2+2t)}$	$\frac{4\pi(t+1)}{t^2+2t+2}$	$\frac{2\pi(t+1)}{e^{-t}+2t(t+2)}$	$\frac{2\pi}{t+2}$

gegeben.

Beweis. Wir erhalten mit der Palm-Verteilung \mathbb{P}_X^0 , $X \in \{\mathcal{E}, \partial \hat{Y}, \mathcal{F}_1, \mathcal{I}\}$, aus (6.16) in Kombination mit [58, Theorem 1] einschließlich des dort nachfolgenden Korollars

$$\begin{aligned} \ell_{\mathcal{E}} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{e \in \mathcal{E}} \sigma_1(e)]}{\lambda_{\mathcal{E}}}, & \ell_{\partial \hat{Y}} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{c \in \hat{Y}} \sigma_1(\partial c)]}{\lambda_{\hat{Y}}}, \\ \ell_{\mathcal{F}_1} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{c \in \hat{Y}} \sigma_1(\partial c)]}{\lambda_{\mathcal{F}_1}}, & \ell_{\mathcal{I}} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{I \in \mathcal{I}} \sigma_1(I)]}{\lambda_{\mathcal{I}}} \end{aligned}$$

für alle $t > 0$. Außerdem erfüllt $a_{\hat{Y}}$ die Bedingung $a_{\hat{Y}} = \frac{4\pi}{\lambda_{\hat{Y}}}$ und demnach vervollständigen Lemma 6.18 und Lemma 6.19 kombiniert mit Satz 6.26 den Beweis. \square

Schließlich benötigen wir für den folgenden Satz den Begriff der Adjazenz. Dazu betrachten wir zwei Klassen $X, Z \in \mathcal{X}$ und nennen $x \in X$ und $z \in Z$ adjazent, falls $x \subset z$ oder $z \subset x$ (x, z als Mengen betrachtend) gilt. Dabei charakterisiert $m_Z(x)$ für ein Objekt $x \in X$ die Anzahl aller Objekte $z \in Z$, die adjazent zu x sind. Für $X, Z \in \mathcal{X}$ bezeichnen wir dann mit $\mu_{X,Z}$ die erwartete Anzahl von Objekten von Z , die adjazent zum typischen Objekt von X sind, d.h.

$$\mu_{X,Z} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{x \in X} m_Z(x)]}{\lambda_X}.$$

Zum Beispiel beschreibt $\mu_{\hat{Y}, \mathcal{E}}$ die erwartete Anzahl der Kanten, die der Rand der typischen Zelle enthält. Wir schreiben im Folgenden für $X \in \{\mathcal{E}, \hat{Y}, \mathcal{F}_1\}$

$$X \cap \mathbb{A} := \{x \in X : x \subset \mathbb{A}\} \quad \text{und} \quad X \setminus \mathbb{A} := \{x \in X : x \not\subset \mathbb{A}\}.$$

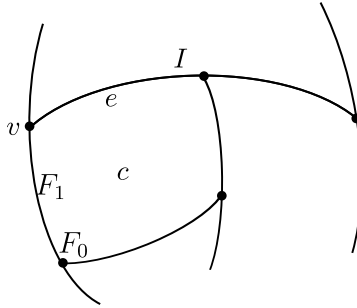


Abbildung 6.2: Ausschnitt eines MNW-Mosaiks auf \mathcal{S}^2 .

Satz 6.28. Für $X, Z \in \mathcal{X}$ sind die Mittelwerte $\mu_{X,Z}$ für $t > 0$ durch die Tabelle

X	$\mu_{X,Z}$					
	\mathcal{V}	\mathcal{E}	\hat{Y}	\mathcal{F}_0	\mathcal{F}_1	\mathcal{I}
\mathcal{V}	1	3	3	2	5	$\frac{2(t+1)}{t+2}$
\mathcal{E}	2	1	2	4	2	$\frac{3t+2}{3(t+2)}$
\hat{Y}	$\frac{6t(t+2)}{t^2+2t+2}$	$\frac{6t(t+2)}{t^2+2t+2}$	1	$\frac{12t(t+2)}{t^2+2t+2}$	×	×
\mathcal{F}_0	1	3	3	1	5	$\frac{2(t+1)}{t+2}$
\mathcal{F}_1	$\frac{5t(t+2)}{e^{-t}+2t(t+2)}$	$\frac{3t(t+2)}{e^{-t}+2t(t+2)}$	×	$\frac{10t(t+2)}{e^{-t}+2t(t+2)}$	×	$\frac{2t(t+1)}{e^{-t}+2t(t+2)}$
\mathcal{I}	$\frac{4(t+1)}{t+2}$	$\frac{3t+2}{t+2}$	×	$\frac{8(t+1)}{t+2}$	$\frac{4(t+1)}{t+2}$	1

gegeben.

Beweis. Die Werte auf der Diagonalen der Tabelle sind bis auf $\mu_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1}$ nicht mehr zu zeigen. Wir betrachten zunächst den Fall $X = \mathcal{V}$. Mithilfe der Abbildung 6.2 erhalten wir für $v \in \mathcal{V} \neq \emptyset$ fast sicher

$$m_{\mathcal{E}}(v) = m_{\hat{Y}}(v) = 3, \quad m_{\mathcal{F}_0}(v) = 2, \quad m_{\mathcal{F}_1}(v) = 5$$

und damit

$$\mu_{\mathcal{V}, \mathcal{E}} = \mu_{\mathcal{V}, \hat{Y}} = 3, \quad \mu_{\mathcal{V}, \mathcal{F}_0} = 2, \quad \mu_{\mathcal{V}, \mathcal{F}_1} = 5.$$

Für den Fall, dass $Z = \mathcal{I}$ gilt, müssen wir beachten, dass der Äquator kein I-Segment ist. Dies liefert dann für $\mathcal{V} \neq \emptyset$ fast sicher

$$m_{\mathcal{I}}(v) = \begin{cases} 2, & v \in \mathcal{V} \setminus \mathbb{A}, \\ 1, & v \in \mathcal{V} \cap \mathbb{A}. \end{cases}$$

Daraus schließen wir unter Berücksichtigung von Korollar 6.23, dass

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{V}, \mathcal{I}} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{v \in \mathcal{V}} m_{\mathcal{I}}(v)]}{\lambda_{\mathcal{V}}} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{v \in \mathcal{V} \setminus \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(v)] + \mathbb{E}[\sum_{v \in \mathcal{V} \cap \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(v)]}{\lambda_{\mathcal{V}}} \\ &= \frac{2(\lambda_{\mathcal{V}} - 4t) + 4t}{\lambda_{\mathcal{V}}} = \frac{2(2t(t+2) - 4t) + 4t}{2t(t+2)} = \frac{2(t+1)}{t+2}\end{aligned}$$

für alle $t > 0$.

Es sei nun $X = \mathcal{E}$. Mit Blick auf Abbildung 6.2 ergibt sich fast sicher für $e \in \mathcal{E} \neq \emptyset$

$$m_{\mathcal{V}}(e) = m_{\hat{Y}}(e) = m_{\mathcal{F}_1}(e) = 2, \quad m_{\mathcal{F}_0}(e) = 4$$

und deshalb

$$\mu_{\mathcal{E}, \mathcal{V}} = \mu_{\mathcal{E}, \hat{Y}} = \mu_{\mathcal{E}, \mathcal{F}_1} = 2, \quad \mu_{\mathcal{E}, \mathcal{F}_0} = 4.$$

Der interessantere Fall wird wieder durch $Z = \mathcal{I}$ verkörpert. Es gilt fast sicher für $\mathcal{E} \neq \emptyset$

$$m_{\mathcal{I}}(e) = \begin{cases} 1, & e \in \mathcal{E} \setminus \mathbb{A}, \\ 0, & e \in \mathcal{E} \cap \mathbb{A} \end{cases}$$

und daher mit Korollar 6.23

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{E}, \mathcal{I}} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{e \in \mathcal{E}} m_{\mathcal{I}}(e)]}{\lambda_{\mathcal{E}}} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{e \in \mathcal{E} \setminus \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(e)] + \mathbb{E}[\sum_{e \in \mathcal{E} \cap \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(e)]}{\lambda_{\mathcal{E}}} \\ &= \frac{\lambda_{\mathcal{E}} - 4t}{\lambda_{\mathcal{E}}} = \frac{3t(t+2) - 4t}{3t(t+2)} = \frac{3t+2}{3(t+2)}\end{aligned}$$

für alle $t > 0$.

Für $X = \hat{Y}$ erhält man fast sicher

$$\sum_{x \in X} m_Z(x) = \sum_{z \in Z} m_X(z) \tag{6.17}$$

für alle $Z \in \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}_0\}$ und somit

$$\mu_{X, Z} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{x \in X} m_Z(x)]}{\lambda_X} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{z \in Z} m_X(z)]}{\lambda_X}.$$

Dies liefert für alle $t > 0$

$$\mu_{\hat{Y}, \mathcal{V}} = \frac{3\lambda_{\mathcal{V}}}{\lambda_{\hat{Y}}}, \quad \mu_{\hat{Y}, \mathcal{E}} = \frac{2\lambda_{\mathcal{E}}}{\lambda_{\hat{Y}}}, \quad \mu_{\hat{Y}, \mathcal{F}_0} = \frac{3\lambda_{\mathcal{F}_0}}{\lambda_{\hat{Y}}}.$$

Des Weiteren ergibt sich für $X = \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ gemäß der Abbildung 6.2 fast sicher

$$m_{\mathcal{V}}(F_0) = 1, \quad m_{\mathcal{E}}(F_0) = m_{\hat{Y}}(F_0) = 3, \quad m_{\mathcal{F}_1}(F_0) = 5$$

für alle $F_0 \in \mathcal{F}_0$. Daraus folgt für $t > 0$

$$\mu_{\mathcal{F}_0, \mathcal{V}} = 1, \quad \mu_{\mathcal{F}_0, \mathcal{E}} = \mu_{\mathcal{F}_0, \hat{\mathcal{Y}}} = 3, \quad \mu_{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1} = 5.$$

Andererseits müssen wir beachten, dass für $Z = \mathcal{I}$

$$m_{\mathcal{I}}(F_0) = \begin{cases} 2, & F_0 \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathbb{A}, \\ 1, & F_0 \in \mathcal{F}_0 \cap \mathbb{A} \end{cases}$$

fast sicher für $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ gilt. Demnach bekommt man mit Bemerkung 6.25 für alle $t > 0$

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{F}_0, \mathcal{I}} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{F_0 \in \mathcal{F}_0} m_{\mathcal{I}}(F_0)]}{\lambda_{\mathcal{F}_0}} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{F_0 \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(F_0)] + \mathbb{E}[\sum_{F_0 \in \mathcal{F}_0 \cap \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(F_0)]}{\lambda_{\mathcal{F}_0}} \\ &= \frac{2(\lambda_{\mathcal{F}_0} - 8t) + 8t}{\lambda_{\mathcal{F}_0}} = \frac{2(4t(t+2) - 8t) + 8t}{4t(t+2)} = \frac{2(t+1)}{t+2}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun $X = \mathcal{F}_1$. Offensichtlich gilt wie in (6.17) fast sicher

$$\sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1} m_Z(F_1) = \sum_{z \in Z} m_{\mathcal{F}_1}(z)$$

für alle $Z \in \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}_0\}$ und demzufolge für $t > 0$

$$\mu_{\mathcal{F}_1, \mathcal{V}} = \frac{5\lambda_{\mathcal{V}}}{\lambda_{\mathcal{F}_1}}, \quad \mu_{\mathcal{F}_1, \mathcal{E}} = \frac{2\lambda_{\mathcal{E}}}{\lambda_{\mathcal{F}_1}}, \quad \mu_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_0} = \frac{5\lambda_{\mathcal{F}_0}}{\lambda_{\mathcal{F}_1}}.$$

Weiterhin erhält man fast sicher für $Z = \mathcal{I}$

$$m_{\mathcal{I}}(F_1) = \begin{cases} 1, & F_1 \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathbb{A}, \\ 0, & F_1 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathbb{A} \end{cases}$$

und mit Bemerkung 6.25

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{F}_1, \mathcal{I}} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1} m_{\mathcal{I}}(F_1)]}{\lambda_{\mathcal{F}_1}} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(F_1)] + \mathbb{E}[\sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(F_1)]}{\lambda_{\mathcal{F}_1}} \\ &= \frac{\lambda_{\mathcal{F}_1} - (4t + 2e^{-t})}{\lambda_{\mathcal{F}_1}} = \frac{2(e^{-t} + 2t(t+2)) - (4t + 2e^{-t})}{2(e^{-t} + 2t(t+2))} = \frac{2t(t+1)}{e^{-t} + 2t(t+2)} \end{aligned}$$

für $t > 0$.

Als Letztes ist der Fall $X = \mathcal{I}$ zu untersuchen. Für alle $Z \in \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$ machen wir wieder von (6.17) Gebrauch. Zum einen gilt unter Verwendung von Korollar 6.23

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{I}, \mathcal{V}} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{I \in \mathcal{I}} m_{\mathcal{V}}(I)]}{\lambda_{\mathcal{I}}} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{v \in \mathcal{V} \setminus \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(v)] + \mathbb{E}[\sum_{v \in \mathcal{V} \cap \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(v)]}{\lambda_{\mathcal{I}}} \\ &= \frac{2(\lambda_{\mathcal{V}} - 4t) + 4t}{\lambda_{\mathcal{I}}} = \frac{2(2t(t+2) - 4t) + 4t}{t(t+2)} = \frac{4(t+1)}{t+2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{I},\mathcal{E}} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{I \in \mathcal{I}} m_{\mathcal{E}}(I)]}{\lambda_{\mathcal{I}}} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{e \in \mathcal{E} \setminus \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(e)] + \mathbb{E}[\sum_{e \in \mathcal{E} \cap \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(e)]}{\lambda_{\mathcal{I}}} \\ &= \frac{\lambda_{\mathcal{E}} - 4t}{\lambda_{\mathcal{I}}} = \frac{3t(t+2) - 4t}{t(t+2)} = \frac{3t+2}{t+2}\end{aligned}$$

für alle $t > 0$. Zum anderen ergibt sich aus Bemerkung 6.25 für $t > 0$

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{I},\mathcal{F}_0} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{I \in \mathcal{I}} m_{\mathcal{F}_0}(I)]}{\lambda_{\mathcal{I}}} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{F_0 \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(F_0)] + \mathbb{E}[\sum_{F_0 \in \mathcal{F}_0 \cap \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(F_0)]}{\lambda_{\mathcal{I}}} \\ &= \frac{2(\lambda_{\mathcal{F}_0} - 8t) + 8t}{\lambda_{\mathcal{I}}} = \frac{2(4t(t+2) - 8t) + 8t}{t(t+2)} = \frac{8(t+1)}{t+2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{I},\mathcal{F}_1} &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{I \in \mathcal{I}} m_{\mathcal{F}_1}(I)]}{\lambda_{\mathcal{I}}} = \frac{\mathbb{E}[\sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(F_1)] + \mathbb{E}[\sum_{F_1 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathbb{A}} m_{\mathcal{I}}(F_1)]}{\lambda_{\mathcal{I}}} \\ &= \frac{\lambda_{\mathcal{F}_1} - (4t + 2e^{-t})}{\lambda_{\mathcal{I}}} = \frac{2(e^{-t} + 2t(t+2)) - (4t + 2e^{-t})}{t(t+2)} = \frac{4(t+1)}{t+2}.\end{aligned}$$

Dies vervollständigt den Beweis. □

Bemerkung 6.29. Die Mittelwerte aus dem Satz 6.28, die mit dem Symbol \times gekennzeichnet sind, lassen sich nicht mit unseren vorgestellten Methoden berechnen. Hier werden andere Techniken notwendig sein, die aber nicht Bestandteil dieser Arbeit sind. Bspw. können wir mit unseren Mitteln den Wert $\mu_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1}$ nicht bestimmen, da in dem Fall keine regelmäßige Adjazenz vorliegt. Dies liegt an der Tatsache, dass MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2 nicht seitentreu sind.

Im euklidischen Fall treten die gleichen Probleme auf, die aber in [11] und [12] mit anderen Methoden behoben wurden.

6.5 Poissonsche Großkreismosaik auf \mathcal{S}^2

Im abschließenden Abschnitt möchten wir unsere Mittelwerte für MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2 aus Satz 6.26 und 6.27 mit denen für Poissonsche Großkreismosaik auf \mathcal{S}^2 vergleichen. Um ein Poissonsches Großkreismosaik auf \mathcal{S}^2 zu definieren, betrachten wir für $\lambda > 0$ einen Poissonschen Punktprozess η_λ auf \mathcal{S}^2 mit Intensitätsmaß $\lambda\mu_2$. Für weitere Details verweisen wir lediglich auf [45, Section 6]. Unter einem Poissonschen Großkreismosaik auf \mathcal{S}^2 verstehen wir nun die zufällige abgeschlossene Menge

$$Y_{\mathcal{S}^2}^{PG}(\lambda) := \mathbb{A} \cup \bigcup_{u \in \eta_\lambda} (\mathcal{S}^2 \cap u^\perp),$$

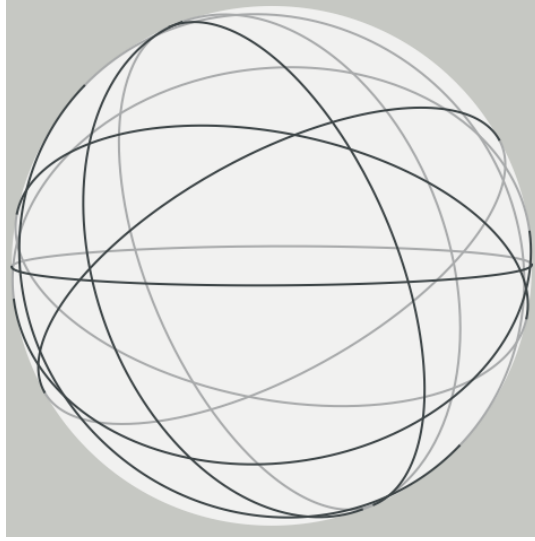


Abbildung 6.3: Realisierung eines Poissonschen Großkreismosaiks auf \mathcal{S}^2 .

wobei u^\perp den zu u orthogonalen linearen Unterraum beschreibt. Per Konstruktion bildet dies ein zufälliges Mosaik auf \mathcal{S}^2 .

Um einen Vergleich zwischen MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2 und Poissonsche Großkreismosaik auf \mathcal{S}^2 zu ziehen, haben wir in der Definition von $Y_{\mathcal{S}^2}^{PG}(\lambda)$ den Äquator hinzugefügt. Wir bemerken auch, dass Poissonsche Großkreismosaik auf \mathcal{S}^2 im Gegensatz zu MNW-Mosaik auf \mathcal{S}^2 seitentreu sind, d.h., benachbarte Zellen haben als Schnittmenge entweder eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Seite. Wir setzen nun $\lambda = t \geq 0$ und schreiben \mathcal{V}_{PG} , \mathcal{E}_{PG} und \hat{Y}_{PG} für die Menge der Knoten, Kanten und Zellen von $Y_{\mathcal{S}^2}^{PG}(t)$. Dazu bemerken wir, dass $Y_{\mathcal{S}^2}^{PG}(0)$ zwei Zellen, keine Knoten und keine Kanten besitzt. In der obigen Notation erhalten wir folgende Eigenschaften über die Mittelwerte von $Y_{\mathcal{S}^2}^{PG}(t)$.

Lemma 6.30. *Für $t > 0$ ergibt sich*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{e \in \mathcal{E}_{PG}} \sigma_1(e)\right] = 2\pi(1 - e^{-t} + t), \quad \mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_{PG}} \sigma_1(\partial c)\right] = 4\pi(t + 1)$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{V}_{PG}} &= t(t + 2), & \lambda_{\mathcal{E}_{PG}} &= 2t(t + 2), & \lambda_{\hat{Y}_{PG}} &= t^2 + 2t + 2, \\ \ell_{\mathcal{E}_{PG}} &= \frac{\pi(1 - e^{-t} + t)}{t(t + 2)}, & \ell_{\partial \hat{Y}_{PG}} &= \frac{4\pi(t + 1)}{t^2 + 2t + 2}, & a_{\hat{Y}_{PG}} &= \frac{4\pi}{t^2 + 2t + 2}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass ein Poissonsches Großkreismosaik $Y_{\mathcal{S}^2}^{PG}(t)$ bei n Teilungen durch zufällige Großkreise fast sicher $n^2 + n + 2$ Zellen besitzt. Für $n = 0$ ergeben sich gerade 2 Zellen, welche unsere Startzellen zur Zeit $t = 0$ charakterisieren. Wir nehmen

an, dass bisher n Teilungen stattgefunden haben. Falls nun ein weiterer zufälliger Großkreis \mathcal{S}^2 teilt, so schneidet dieser jeden vorliegenden Großkreis, einschließlich den Äquator, von $Y_{\mathcal{S}^2}^{PG}(t)$ fast sicher zweimal, d.h., es gibt bei $n + 1$ Teilungen fast sicher

$$n^2 + n + 2 + 2(n + 1) = (n + 1)^2 + (n + 1) + 2$$

Zellen.

Weil die Anzahl der Teilungen, die wir mit N bezeichnen, Poisson-verteilt mit Parameter t ist, lässt sich leicht die Anzahl der erwarteten Zellen von $Y_{\mathcal{S}^2}^{PG}(t)$ bestimmen. Man erhält nämlich, dass

$$\begin{aligned}\lambda_{\hat{Y}_{PG}} &= \mathbb{E}[N^2 + N + 2] = \mathbb{E}[N^2] + \mathbb{E}[N] + 2 \\ &= \text{Var}(N) + \mathbb{E}[N]^2 + \mathbb{E}[N] + 2 = t^2 + 2t + 2.\end{aligned}$$

Da weiterhin bei N Teilungen doppelt so viele Kanten wie Knoten entstehen, folgt aus [3], dass bei N Teilungen $N(N + 1)$ Knoten und $2N(N + 1)$ Kanten geboren wurden. Dies liefert

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathcal{V}_{PG}} &= \mathbb{E}[N(N + 1)] = \mathbb{E}[N^2] + \mathbb{E}[N] \\ &= \text{Var}(N) + \mathbb{E}[N]^2 + \mathbb{E}[N] = t^2 + 2t = t(t + 2),\end{aligned}$$

und

$$\lambda_{\mathcal{E}_{PG}} = 2t(t + 2)$$

für alle $t \geq 0$.

Des Weiteren ergibt sich

$$\mathbb{E}\left[\sum_{e \in \mathcal{E}_{PG}} \sigma_1(e)\right] = 2\pi\mathbb{E}[N + \mathbf{1}_{\{N \geq 1\}}] = 2\pi(\mathbb{E}[N] + \mathbb{P}(N \geq 1)) = 2\pi(t + 1 - e^{-t})$$

und

$$\mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_{PG}} \sigma_1(\partial c)\right] = 2(2\pi\mathbb{E}[N + 1]) = 4\pi(\mathbb{E}[N] + 1) = 4\pi(t + 1)$$

für alle $t \geq 0$. Mit [3, Section 3] erhalten wir abschließend

$$\begin{aligned}\ell_{\mathcal{E}_{PG}} &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{e \in \mathcal{E}_{PG}} \sigma_1(e)\right]}{\lambda_{\mathcal{E}_{PG}}} = \frac{2\pi(1 - e^{-t} + t)}{2t(t + 2)} = \frac{\pi(1 - e^{-t} + t)}{t(t + 2)}, \\ \ell_{\partial\hat{Y}_{PG}} &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{c \in \hat{Y}_{PG}} \sigma_1(\partial c)\right]}{\lambda_{\hat{Y}_{PG}}} = \frac{4\pi(t + 1)}{t^2 + 2t + 2}, \\ a_{\hat{Y}_{PG}} &= \frac{4\pi}{\lambda_{\hat{Y}_{PG}}} = \frac{4\pi}{t^2 + 2t + 2}\end{aligned}$$

für alle $t > 0$. □

Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55 of *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.
- [2] C. B. Allendoerfer. Steiner's formula on a general S^{n+1} . *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:128–135, 1948.
- [3] E. Arbeiter, M. Zähle. Geometric measures for random mosaics in spherical spaces. *Stochastics Stochastics Rep.*, 46(1-2):63–77, 1994.
- [4] G. Averkov, G. Bianchi. Retrieving convex bodies from restricted covariogram functions. *Adv. in Appl. Probab.*, 39(3):613–629, 2007.
- [5] G. Averkov, G. Bianchi. Confirmation of Matheron's conjecture on the covariogram of a planar convex body. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 11(6):1187–1202, 2009.
- [6] I. Bárány, D. Hug, M. Reitzner, R. Schneider. Random points in halfspheres. *ArXiv e-prints*, May 2015.
- [7] G. Bianchi. Matheron's conjecture for the covariogram problem. *J. London Math. Soc. (2)*, 71(1):203–220, 2005.
- [8] G. Bianchi. The covariogram determines three-dimensional convex polytopes. *Adv. Math.*, 220(6):1771–1808, 2009.
- [9] G. Bianchi, F. Segala, A. Volčič. The solution of the covariogram problem for plane \mathcal{C}_+^2 convex bodies. *J. Differential Geom.*, 60(2):177–198, 2002.
- [10] L. A. Cauchy. Note sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes et à la quadrature des surfaces. *C. r. Acad. Sci. (Paris)*, 13:1060–1065, 1841.
- [11] R. Cowan. Line segments in the isotropic planar STIT tessellation. *Adv. in Appl. Probab.*, 45(2):295–311, 2013.
- [12] R. Cowan, C. Thäle. The character of planar tessellations which are not side-to-side. *Image Anal. Stereol.*, 33:311–329, 2014.

- [13] M. W. Crofton. On the theory of local probability, applied to straight lines drawn at random in a plane; the methods used being also extended to the proof of certain new theorems in the integral calculus. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 158:181–199, 1868.
- [14] M. W. Crofton. Sur quelques théorèmes de calcul intégral. *C. r. Acad. Sci. (Paris)*, 68:1469–1470, 1869.
- [15] P. Davy. Correction: “Projected thick sections through multi-dimensional particle aggregates” (J. Appl. Probability **13** (1976), no. 4, 714–722). *J. Appl. Probability*, 15(2):456, 1978.
- [16] C. Deuß, J. Hörrmann, C. Thäle. A random cell splitting scheme on the sphere. *ArXiv e-prints*, November 2015.
- [17] C. Deuß, C. Thäle. The mixing property of STIT tessellations revisited. *North-Western European Journal of Mathematics*, 2:1–15, 2016.
- [18] J. H. J. Einmahl, E. V. Khmaladze. The two-sample problem in \mathbb{R}^m and measure-valued martingales. In *State of the art in probability and statistics (Leiden, 1999)*, volume 36 of *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.*, pages 434–463. Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2001.
- [19] P. Erdős, A. Rényi. On random graphs. I. *Publ. Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [20] M. Fisz. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], 40. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, eleventh edition, 1989. Translated from the Polish by Hannelore Sulanke, Rolf Sulanke, Josef Wloka and Viktor Ziegler.
- [21] B. Galerne. Computation of the perimeter of measurable sets via their covariogram. Applications to random sets. *Image Anal. Stereol.*, 30(1):39–51, 2011.
- [22] E. N. Gilbert. Random graphs. *Ann. Math. Statist.*, 30:1141–1144, 1959.
- [23] H. Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.
- [24] G. Herglotz. Über die Steinersche Formel für Parallellflächen. *Abh. Math. Sem. Han-sischen Univ.*, 15:165–177, 1943.
- [25] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 10 edition, 1991.
- [26] M. Heveling, M. Reitzner. Poisson-Voronoi approximation. *Ann. Appl. Probab.*, 19(2):719–736, 2009.

- [27] D. Hug, G. Last, M. Schulte. Second order properties and central limit theorems for geometric functionals of Boolean models. *ArXiv e-prints*, August 2013.
- [28] D. Hug, R. Schneider. Random conical tessellations. *ArXiv e-prints*, August 2015.
- [29] K. Jänich. *Topologie*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 1994. With a chapter by Theodor Bröcker.
- [30] F. Jarre, J. Stoer. *Optimierung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1 edition, 2004.
- [31] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.
- [32] D. G. Kendall. Foundations of a theory of random sets. In *Stochastic geometry (a tribute to the memory of Rollo Davidson)*, pages 322–376. Wiley, London, 1974.
- [33] E. V. Khmaladze, N. Toronjadze. On the almost sure coverage property of Voronoi tessellation: the \mathbb{R}^1 case. *Adv. in Appl. Probab.*, 33(4):756–764, 2001.
- [34] D. A. Klain. A short proof of Hadwiger’s characterization theorem. *Mathematika*, 42(2):329–339, 1995.
- [35] D. A. Klain, G.-C. Rota. *Introduction to geometric probability*. Lezioni Lincee. [Lincei Lectures]. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [36] R. Lachièze-Rey. Mixing properties for STIT tessellations. *Adv. in Appl. Probab.*, 43(1):40–48, 2011.
- [37] S. Martínez, W. Nagel. Ergodic description of STIT tessellations. *Stochastics*, 84(1):113–134, 2012.
- [38] S. Martínez, W. Nagel. STIT tessellations have trivial tail σ -algebra. *Adv. in Appl. Probab.*, 46(3):643–660, 2014.
- [39] S. Martínez, W. Nagel. The β -mixing rate of STIT tessellations. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, pages 1–19, 2015.
- [40] G. Matheron. *Random sets and integral geometry*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1975. With a foreword by Geoffrey S. Watson, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [41] G. Matheron. Le covariogramme géométrique des compacts convexes de \mathbb{R}^2 . *Technical report 2/86, Centre de Géostatistique, Ecole des Mines de Paris*, 54, 1986.
- [42] J. Mecke, W. Nagel, V. Weiss. A global construction of homogeneous random planar tessellations that are stable under iteration. *Stochastics*, 80(1):51–67, 2008.

- [43] J. Mecke, W. Nagel, V. Weiss. The iteration of random tessellations and a construction of a homogeneous process of cell divisions. *Adv. in Appl. Probab.*, 40(1):49–59, 2008.
- [44] R. E. Miles. Poisson flats in Euclidean spaces. II. Homogeneous Poisson flats and the complementary theorem. *Advances in Appl. Probability*, 3:1–43, 1971.
- [45] R. E. Miles. Random points, sets and tessellations on the surface of a sphere. *Sankhyā Ser. A*, 33:145–174, 1971.
- [46] R. E. Miles. Estimating aggregate and overall characteristics from thick sections by transmission microscopy. *J. Microsc.*, 107:227–233, 1976.
- [47] H. Minkowski. *Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs*, volume 2. Teubner, Leipzig-Berlin, 1911.
- [48] I. S. Molchanov. *Limit theorems for unions of random closed sets*, volume 1561 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [49] W. Nagel. Orientation-dependent chord length distributions characterize convex polygons. *J. Appl. Probab.*, 30(3):730–736, 1993.
- [50] W. Nagel, V. Weiss. Limits of sequences of stationary planar tessellations. *Adv. in Appl. Probab.*, 35(1):123–138, 2003. In honor of Joseph Mecke.
- [51] W. Nagel, V. Weiss. Crack STIT tessellations: characterization of stationary random tessellations stable with respect to iteration. *Adv. in Appl. Probab.*, 37(4):859–883, 2005.
- [52] M. D. Penrose. *Random geometric graphs*, volume 5 of *Oxford Studies in Probability*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [53] M. D. Penrose. Laws of large numbers in stochastic geometry with statistical applications. *Bernoulli*, 13(4):1124–1150, 2007.
- [54] J. Rataj. On set covariance and three-point test sets. *Czechoslovak Math. J.*, 54(129)(1):205–214, 2004.
- [55] M. Reitzner. Random points on the boundary of smooth convex bodies. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(6):2243–2278 (electronic), 2002.
- [56] M. Reitzner, M. Schulte, C. Thäle. Limit theory for the Gilbert graph. *ArXiv e-prints*, December 2013.
- [57] M. Reitzner, E. Spodarev, D. Zaporozhets. Set reconstruction by Voronoi cells. *Adv. in Appl. Probab.*, 44(4):938–953, 2012.
- [58] W. Rother, M. Zähle. Palm distributions in homogeneous spaces. *Math. Nachr.*, 149:255–263, 1990.

- [59] L. A. Santaló. On parallel hypersurfaces in the elliptic and hyperbolic n -dimensional space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1:325–330, 1950.
- [60] M. Schmitt. On two inverse problems in mathematical morphology. In *Mathematical morphology in image processing*, volume 34 of *Opt. Engrg.*, pages 151–169. Dekker, New York, 1993.
- [61] R. Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, volume 151 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, expanded edition, 2014.
- [62] R. Schneider, W. Weil. *Integralgeometrie*. Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik. [Teubner Texts on Mathematical Stochastics]. B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [63] R. Schneider, W. Weil. *Stochastic and integral geometry*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [64] T. Schreiber, C. Thäle. Intrinsic volumes of the maximal polytope process in higher dimensional STIT tessellations. *Stochastic Process. Appl.*, 121(5):989–1012, 2011.
- [65] T. Schreiber, C. Thäle. Second-order theory for iteration stable tessellations. *Probab. Math. Statist.*, 32(2):281–300, 2012.
- [66] T. Schreiber, C. Thäle. Geometry of iteration stable tessellations: connection with Poisson hyperplanes. *Bernoulli*, 19(5A):1637–1654, 2013.
- [67] T. Schreiber, C. Thäle. Limit theorems for iteration stable tessellations. *Ann. Probab.*, 41(3B):2261–2278, 2013.
- [68] M. Schulte. A central limit theorem for the Poisson-Voronoi approximation. *Adv. in Appl. Math.*, 49(3-5):285–306, 2012.
- [69] J. Steiner. Über parallele Flächen. *Monatsber. Preuß. Akad. der Wiss.*, pages 114–118, Berlin, 1840.
- [70] D. Stoyan, W. S. Kendall, J. Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, second edition, 1995.
- [71] O. Varga. Integralgeometrie 3: CROFTONs Formeln für den Raum. *Math. Z.*, 40:387–405, 1935.
- [72] E. Vidal Abascal. A generalization of Steiner’s formulae. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:841–844, 1947.
- [73] H. Weyl. On the Volume of Tubes. *Amer. J. Math.*, 61(2):461–472, 1939.

- [74] J. E. Yukich. Surface order scaling in stochastic geometry. *Ann. Appl. Probab.*, 25(1):177–210, 2015.
- [75] J. E. Yukich, C. Thäle. Asymptotic theory for statistics of the Poisson-Voronoi approximation. *To appear in Bernoulli (2015+)*.